# 1.

**Compuneți două vibrații perpendiculare de amplitudini egale . Discutați rezultatul obținut în funcție de defazajul dintre ele.**

## REZOLVARE

Fie $x(t) = A \sin(\omega t+\varphi_1)$ oscilația pe Ox

și $y(t) = A \sin(\omega t+\varphi_2)$ oscilația pe Oy

Alcătuim sistemul

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{x}{A} = \sin\omega t\cos\varphi_1 + \cos\omega t \sin\varphi_1 \\ \dfrac{y}{A} = \sin\omega t\cos\varphi_2 + \cos\omega t\sin\varphi_2 \end{cases}$$

Amplificînd cu $\sin\varphi_2$ , respectiv $(-\sin\varphi_1)$, apoi cu $\cos\varphi_2$, respectiv cu $(-\cos\varphi_1)$ și adunînd ecuatiie, obținem:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{A}\sin\varphi_2 - \dfrac{y}{A}\sin\varphi_1 = \sin\omega t \sin(\varphi_1-\varphi_2) \\ \dfrac{x}{A}\cos\varphi_2 - \dfrac{y}{A}\cos\varphi_1 = \cos\omega t \sin(\varphi_1-\varphi_2) \end{cases}$$

Ridicînd la pătrat și adunînd găsim ecuația parametrică:

$$x^2 + y^2 - 2xy\cos(\varphi_2-\varphi_1) = A^2\sin^2(\varphi_2-\varphi_1) \qquad (2)$$

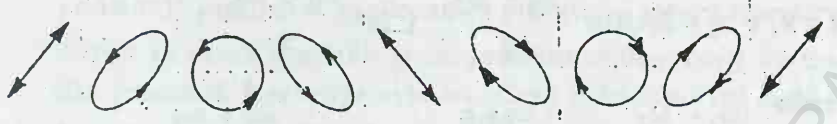
parametrul fiind defazajul $(\varphi_2-\varphi_1)$ între oscilatii

Discuția ecuației (2) după parametrul $(\varphi_2-\varphi_1)$ este redată în tabelul alăturat:



BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

| 0 | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\pi$ | $\frac{5\pi}{4}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{7\pi}{4}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|



dreapta $y=x$ | elipsă | cercul $x^2+y^2=A^2$ | elipsă | dreapta $y=-x$ | elipsă | cercul $x^2+y^2=A^2$ | elipsă | dreapta $y=x$

Obs. Se poate alege $\varphi_1 = 0$; traiectoria este o elipsă cu axele înclinate la 45° în raport cu direcțiile oscilațiilor. Cazuri particulare : elipsă degenerată într-un segment; cerc.

Rezultatul poate fi generalizat pentru amplitudini diferite sau chiar direcții care fac între ele un unghi oarecare.

## 2.

Să se demonstreze că frecvența de variație a intensității sunetului produs prin suprapunerea a două oscilații de frecvențe $\omega_1$ și $\omega_2$ este dublă față de frecvența de modulație

$$\omega_{mod} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$$

A cceași amplitudin

Reprezentați grafic variația în timp a oscilației rezultate prin suprapunerea sunetelor a două diapazoane ce oscilează pe frecvențele $\upsilon_1 = 9$ Hz și $\upsilon_2 = 10$ Hz, apoi intensitatea sunetului rezultat în funcție de timp $I_{(t)} \sim A^2_{mod(t)}$

REZOLVARE

Fie cele două oscilații de aceeași amplitudine și de frecvențe diferite

$$\begin{cases} x_1 = A \sin\omega_1 t \\ x_2 = A \sin\omega_2 t \end{cases}$$

BCU IAȘI - CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Prin suprapunerea lor , găsim:

$$x = x_1 + x_2 = 2A \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t$$

cu notațiile

$$\omega_{mod} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} = \frac{\omega_{bătăi}}{2} \quad \text{și} \quad \omega_m = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

ecuația oscilației rezultante devine :

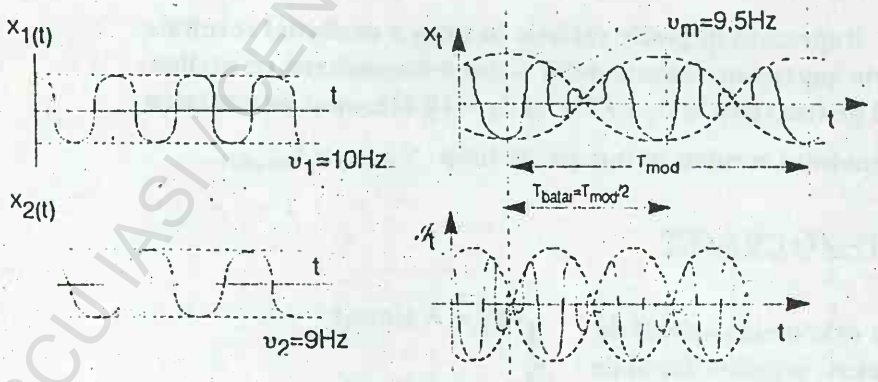
$$x_{(t)} = \underbrace{2A \cos\omega_{mod} t}\ \sin\omega_m t$$

unde $A_{mod(t)} = 2A \cos\omega_{mod} t$

Intensitatea rezultantă va fi proporțională cu pătratul amplitudinii modulate :

$$\mathcal{I}_{(t)} \approx \mathcal{A}^2_{mod(t)} = 4A^2 \cos^2\omega_{mod} t = 2A^2 [1 + \cos 2\omega_{mod} t]$$

$= 2A^2 [1 + \cos\omega_{bătăi} t]$ oscilează cu frecvența bătăilor




BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

**Găsiți ecuația oscilației armonice rezultată prin suprapunerea a N oscilații de aceeași amplitudine și având frecvențele în progresie aritmetică, cu primul termen $\omega$ și rația $\alpha$. Discuție după N.**

## REZOLVARE

**Fie suprapunerea de N funcții armonice:**

$$u(t)= A\cos\omega t + A\cos(\omega+\alpha)\,t + \ldots + A\cos(\omega+(N-1)\alpha)t \qquad (1)$$

**Să observăm că u poate fi scris ca partea reală a funcției complexe:**

$$(2)\quad \underline{v}= A(e^{i\omega t} + e^{i(\omega+\alpha)t} + \ldots + e^{i(\omega+(N-1)\alpha)t}) = Ae^{i\omega t}(1 + e^{i\alpha t} +$$

$$+ e^{2i\alpha t} + \ldots + e^{(N-1)i\alpha t}) = Ae^{i\omega t}\,\frac{e^{Ni\alpha t}-1}{e^{i\alpha t}-1} =$$

$$= Ae^{i\omega t}\,\frac{e^{\frac{N}{2}i\alpha t}}{e^{\frac{i\alpha t}{2}}}\;\frac{e^{\frac{N}{2}i\alpha t} - e^{\frac{-N}{2}i\alpha t}}{e^{\frac{i\alpha t}{2}} - e^{-\frac{i\alpha t}{2}}}$$

$$= Ae^{i\omega t}\,\frac{e^{\frac{N}{2}i\alpha t}}{e^{\frac{i\alpha t}{2}}}\;\frac{\sin\frac{N\alpha t}{2}}{\sin\frac{\alpha t}{2}}$$

**deci**

$$\underline{v} = Ae^{i\left[\omega+\frac{(N-1)\alpha}{2}\right]t}\;\frac{\sin\frac{N\alpha t}{2}}{\sin\frac{\alpha t}{2}}$$

**Luînd partea reală ; obținem:**

$$u_{(t)}=A\cos\left[\omega+\frac{(N-1)\alpha}{2}\right]t\;\frac{\sin\frac{N\alpha t}{2}}{\sin\frac{\alpha t}{2}} \qquad (3)$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Notînd $\omega_m = \frac{\omega+\omega+(N-1)\alpha}{2} = \omega + \frac{(N-1)\alpha}{2}$ o pulsație medie între prima $\omega$ și ultima $\omega+(N-1)\alpha$ și prin :

$\omega_{mod} = \frac{\omega+(N-1)\alpha-\omega}{2} = \frac{(N-1)\alpha}{2}$, găsim o expresie echivalentă lui (3) :

$$u_{(t)} = A\cos\omega_m t \; \frac{\sin \frac{N}{N-1}\omega_{mod} t}{\sin \frac{1}{N-1}\omega_{mod} t}$$

Funcția $\cos\omega_m t$ descrie o oscilație armonică de aceeași formă cu fiecare din termenii superpoziției (1) dar în loc să aibă amplitudinea A, are amplitudinea

$$A_{(\omega_{mod},N)} = A \; \frac{\sin \frac{N}{N-1}\omega_{mod} t}{\sin \frac{1}{N-1}\omega_{mod} t} \qquad (4)$$

Atunci :

$$u_{(t)} = A_{(\omega_{mod},N)}\cos\omega_m t \qquad (5)$$

Cînd avem oscilații în timp (1) cazul N=2 corespunde fenomenului de "bătăi", iar pentru oscilații în spațiu

$u_{(z)} = A\cos Kz + A\cos(Kz+\alpha) + A\cos(Kz+2\alpha) + \ldots$

$\ldots + A\cos(Kz+(N-1)\alpha)$, ceea ce corespunde figurii de interferență (difracție) cu o fantă îngustă.

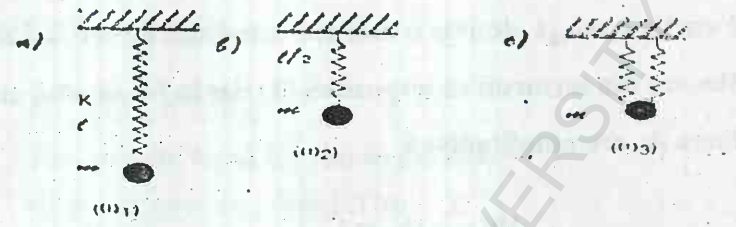
În cazul oscilațiilor în timp și cînd N este mare, apar "modulații" care produc o comportare de puls($N \to \infty$).

În cazul oscilațiilor în spațiu N mare determină o figură de interferență corespunzătoare la fante multiple (rețea de difracție) iar în limita $N \to \infty$ se obține figura de difracție pe o singură fantă cu deschiderea $>> \lambda$.

BCU ACADEMICAL UNIVERSITY LIBRARY

**4.**

**Un corp de masă m suspendat de un resort avînd constanta elastică K oscilează cu pulsația $\omega_1$. Dacă tăiem resortul în două jumătăți și suspendăm același corp de una din jumătăți, frecvența este $\omega_2$. Care este raportul $\omega_2/\omega_1$? Dar dacă suspendăm corpul de ambele jumătăți ca în fig. c)?**




REZOLVARE

$k=\frac{mg}{\Delta l}$

Cum, din legea lui Hooke $\Delta l = l_0 \frac{F}{SE}$, rezultă $\Delta l \sim l_0$ constanta resortului înjumătățit b) va fi $K' = \frac{mg}{\Delta l/2} = 2K$

Atunci

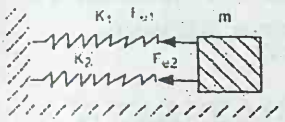
$\omega_1 = \sqrt{K/m}$, iar $\omega_2 = \sqrt{2K/m}$, deci $\omega_2/\omega_1 = \sqrt{2}$

În cazul c) cele două jumătăți de resort sînt legate în paralel $K_e = K_1 + K_2 = 2K = 4K$, astfel încît $\omega_3 = 2\omega_1$.

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

**Două resorturi cu aceeași lungime în stare nedeformată dar având constante elastice diferite $K_1$, $K_2$ sînt legate de un bloc de masă m pe o suprafață orizontală. Calculați perioada micilor oscilații în fiecare din cele trei cazuri prezentate în figură.**

REZOLVARE



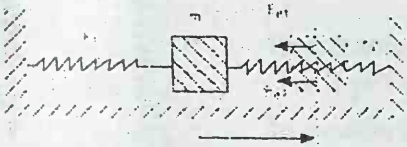

a)

$$\text{a)}\quad \vec{Fe}_1+\vec{Fe}_2=m\vec{a}$$

$$-(K_1+K_2)x=m\ddot{x}$$

$$\omega^2=\frac{(K_1+K_2)}{m}$$

$$K_e=K_1+K_2,\ \text{deci}\ T_a=2\pi\sqrt{\frac{m}{(K_1+K_2)}}$$




b)

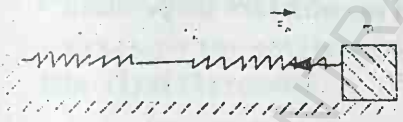
$$\text{b)}\quad \vec{F}_{e1}+\vec{F}_{e2}=m\vec{a}$$

$$-(K_1+K_2)x=m\ddot{x}$$

$$\omega^2=\frac{(K_1+K_2)}{m}$$

$$K_e=K_1+K_2$$

$$\text{deci}\ T_b=2\pi\sqrt{\frac{m}{(K_1+K_2)}}$$




c)

$$\vec{F}_{e1}=\vec{F}_{e2}=\vec{ma}$$

$$-K_1x_1=-K_2x_2=m(\ddot{x}_1+\ddot{x}_2)$$

$x_1, x_2$ = elongațiile individuale

$x_1+x_2=x$ elongația totală

$$x_1=\frac{K_2\,x}{(K_1+K_2)}$$

ecuația devine $m\ddot{x}=-\dfrac{K_1K_2}{(K_1+K_2)}\,x$ cu $\omega^2=\dfrac{(K_1K_2)}{m(K_1+K_2)}$

deci

$$K_e=\frac{K_1K_2}{(K_1+K_2)},\ \text{iar perioada}\ Tc=2\pi\sqrt{\frac{m\,(K_1+K_2)}{K_1K_2}}$$



BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

**6.**

Să se determine constanta elastică pentru montajul din figura, știind că:

a) Barele AB și CD rămîn orizontale, iar E și F sînt mijloacele segmentelor AB, respectiv CD.

b) Barele nu rămîn orizontale, iar E și F sînt mijloacele segmentelor AB și respectiv CD.

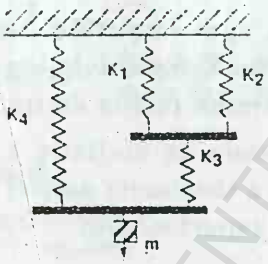
c) Dar dacă suportul resorturilor e jos și barele sînt susținute deasupra.

REZOLVARE

Resorturile $K_1$ și $K_2$ sînt în paralel, iar $K_3$ în serie cu grupajul lor.

$$\frac{1}{K_{e(1,2,3)}} = \frac{1}{K_1 + K_2} + \frac{1}{K_3}$$

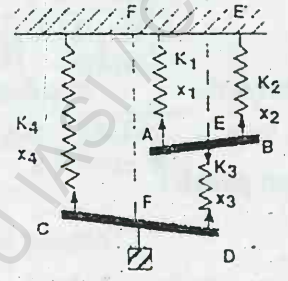
a)




La rîndul său $K_{e(1,2,3)}$ e în paralel cu $K_4$:

$$K_e = K_4 + \frac{K_3(K_1 + K_2)}{K_1 + K_2 + K_3}$$

b)




Stabilim relațiile:

(1) $K_1x_1 = K_2x_2$

(2) $2K_1x_1 = K_3x_3$

(3) $K_3x_3 = K_4x_4$

(4) $K_3x_3 + K_4x_4 = K_ex_e =$

$$= K_e \frac{X_4 + X_3 + \frac{X_1 + X_2}{2}}{2}$$



BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY
FIZICĂ

întrucît $EE' = \frac{X_1 + X_2}{2}$ (linia mijlocie) și la fel

$$FF' = \frac{X_3 + X_4 + EE'}{2}$$

Rezultă

$$\frac{1}{K_e} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{K_4} + \frac{1}{K_3} + \frac{1}{4K_1} + \frac{1}{4K_2}\right)$$

c) idem b)

## 7.

Fie n resorturi grupate în serie, apoi în paralel și susținînd în fiecare caz aceeași masă m. Constantele lor elastice fiind $K_1, K_2, \ldots K_n$, să se determine relația dintre ele, astfel încît raportul dintre perioada de oscilație a sistemului serie și perioada de oscilație a sistemului paralel să fie minim. Care este valoarea acestui raport minim?

REZOLVARE

$T_s = 2\pi\sqrt{m\sum\frac{1}{K_i}}$ perioada sistemului serie

$T_p = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\sum_{i=1}^{n} K_i}}$ perioada sistemului paralel

$$\frac{T_s}{T_p} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{K_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} K_i\right)}$$

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Cum $K_i \in R$, putem folosi inegalitatea Cauchy-Buniakovski

$$\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i\right)^2$$

deci la noi $\frac{Ts}{Tp} \geq n$ ,așadar valoarea minimă a raportului

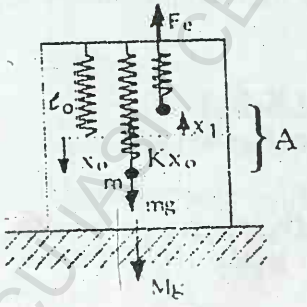
$\left(\frac{Ts}{Tp}\right)_{min} = n$ și corespunde cazului în care:

$K_1=K_2= ... =K_n$ , adică resorturile sînt identice.

## 8.

**O cutie cu masa M se află pe o suprafață orizontală. De capacul său este prins un resort de constantă elastică K . care susține masa m aflată în oscilație. Pentru ce amplitudine a oscilațiilor masei m cutia sare de pe masă?**

REZOLVARE




La echilibru resortul e alungit cu

$X_0 = \frac{mg}{K}$.

În momentul desprinderii, reactiunea $\vec{N}$ se anulează și rezultă $F_e=Mg$ , de unde comprimarea

$X_1 = \frac{Mg}{K}$

Rezultă

$A = X_0+X_1 = \frac{(M+m)g}{K}$

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

## 9.

**De un resort de constantă elastică K se leagă un scripete de masă neglijabilă. Pe scripete este trecut un fir la capetele căruia sînt suspendate două mase $m_1$ și $m_2$.**

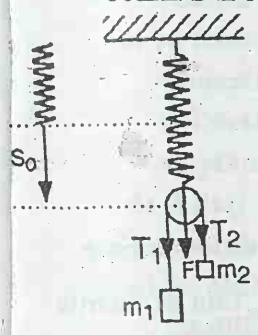
**Să se determine perioada de oscilație a resortului dacă:**

**a) Scripetele este blocat ;**

**b) Sistemul celor două mase este lăsat liber ;**

**Aplicație numerică: $m_1 = 6$ Kg , $m_2 = 3$ Kg , $K = 400$ N/m**

### REZOLVARE




**a)**

**Rezultanta tensiunilor din fire**

$$F = T_1 + T_2 = (m_1+m_2)g$$

**În poziția de echilibru**

$$Fe_0 = F$$

$$K s_0 = (m_1+m_2)g \quad (1)$$

**În mișcare la mom. t**

$$\vec{F}'e + \vec{F} = (m_1+m_2)\vec{a}$$

$$-K(x+s_0) + (m_1+m_2)g = (m_1+m_2)\ddot{x} \qquad (2)$$

**Din (1) și (2) rezultă**

$$-K x = (m_1+m_2)\ddot{x}$$

**mișcarea oscilatorie are pulsația**

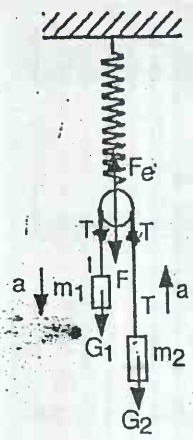
$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m_1+m_2}}$$

**iar perioada**

$$\sigma = 2\pi\sqrt{\frac{m_1+m_2}{K}} = 0{,}94 \text{ s}$$



BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY




b)

Mișcarea maselor $m_1$ și $m_2$ față de scripete:

$$\begin{cases} m_1 a = m_1 g - T_1 \\ m_2 a = T_1 - m_2 g \end{cases} \qquad T1 = T2 = T = \frac{2m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}$$

$$F = 2T = \frac{4m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}$$ forța de deformare

La echilibru:

$$Fe_o = F$$

$$K s_o = \frac{4m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} = G \text{ echiv.}$$

Masa echivalentă a sistemului $\frac{4m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}$

În mșcare:

$$\vec{Fe} + \vec{F} = me\ \vec{a}_{osc}$$

$$-K(s_0+x) + \frac{4m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} = \frac{4m_1 m_2}{m_1+m_2}\ \ddot{x}$$

Rezultă

$$-K x = \frac{4m_1 m_2}{m_1+m_2}\ \ddot{x}$$

Mișcarea oscilatorie va avea pulsația

$$\omega = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K(m_1+m_2)}{m_1 \cdot m_2}}$$

și perioada

$$\sigma = 4\pi\sqrt{\frac{m_1 m_2}{K(m_1+m_2)}} = 0{,}88 \text{ s}$$

Altă soluție:

Față de scripete, $m_1$ și $m_2$ se mișcă cu accelerații egale în modul $a_r$, iar scripetele cu accelerația a față de sol. Avem



BCUIAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$a_r = a_2 - a = a - a_1$ unde $a_1$ și $a_2$ sînt accelerațiile corpurilor față de sol. Avem deci, condiția de legătură :

$$a_1 + a_2 = 2a$$

Mișcarea maselor față de sol ne conduce la :

$$\begin{cases} m_1 g - T = m_1 a_1 \\ m_2 g - T = m_2 a_2 \end{cases} \quad \text{de unde} \quad \begin{cases} a_1 = g - \frac{T}{m_1} \\ a_2 = g - \frac{T}{m_2} \end{cases}$$

Din condiția de legătură între accelerații rezultă :

$$a_1 + a_2 = 2g - T\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) = 2a$$

și cum tensiunea

$T = \frac{Fe}{2}$ (echilibrul forțelor la nivelul scripetelui)

rezultă

$$a = g - \frac{Kx}{4} \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}$$

adică ecuația unei mișcări oscilatorii armonice a scriptelui cu pulsația

$$\omega^2 = \frac{K}{4} \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}$$

și perioada

$$\sigma = 4\pi \sqrt{\frac{m_1 m_2}{K(m_1 + m_2)}}$$

## 10.

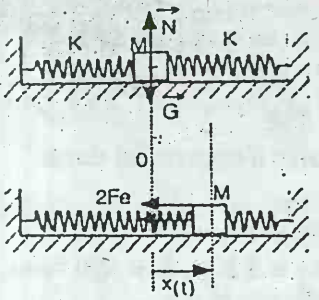
**Studiați micile oscilații ale corpului de masă M prins între două resorturi identice de constantă K , nedeformate în poziția de echilibru, considerînd frecarea corpului M cu suportul neglijabilă, și alegîndu-vă condițiile inițiale**

### REZOLVARE

Principiul II dinamicii ne conduce la :

$$m\vec{a} = 2\vec{Fe}$$

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY




pentru că în orice poziție

$$\vec{G} + \vec{N} = \vec{O}$$

Astfel că

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -2Kx$$

unde notăm prin

$$\omega_0^2 = \frac{2K}{m}$$

dîndu-i sensul de pătrat al pulsației oscilației.

Soluția ecuației

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

ne dă ecuația de mișcare a mobilului:

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

unde constantele A și $\varphi$ se determină din condițiile inițiale.

Astfel dacă la $t_0 = 0$ corpul este deplasat cu $x_0$ față de poziția de echilibru și i se dă drumul să oscileze, vom avea

$$\varphi = 0 \text{ și } A = x_0$$

deci

$$x(t) = x_0 \sin \omega_0 t$$

Dacă la $t_0 = 0$ corpul e în poziție de echilibru și i se imprimă viteza $v_0$, vom găsi pe $\varphi = \frac{\pi}{2}$, iar $A = \frac{v_0}{\omega_0}$, deci ecuația mișcării:

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \cos \omega_0 t.$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

## 11.

Între două resorturi de constante elastice $K_1$ și $K_2$ care au în stare netensionată aceeași lungime $l_0$ se află o masă m care poate aluneca fără frecare pe o suprafață orizontală. Capetele libere ale resorturilor sînt apoi legate de două suporturi $S_1$ și $S_2$ distanțate cu $L(L > 2l_0)$. Să se afle:

a) poziția de echilibru a corpului m ;

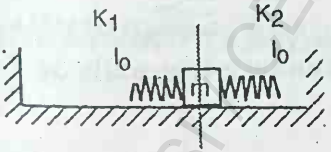
b) perioada de oscilație a lui m , dacă este deplasat cu $x_0$ ($x_0 \ll l_0$) față de poziția de echilibru și este lăsat liber și ecuația sa de mișcare.

c) În momentul cînd blocul trece prin poziția de echilibru o bucată de plastilină cu masa $\Delta m$ cade vertical pe m și se lipește de acesta. Determinați noua perioadă și noua amplitudine.

d) Aflați variația de energie a sistemului și explicați de unde provine.

e) Se obține același rezultat și în cazul în care bucata de plastilină cu aceeași masă cade pe corpul m cînd acesta se află la un capăt al cursei sale?

### REZOLVARE




a) la $t_0 = 0$

la echilibru tensiunea

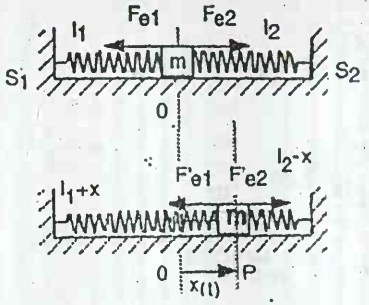
$$T_0 = F_{e1} = F_{e2}$$

$$K_1 (l_1 - l_0) = K_2 (l_2 - l_0) \qquad (1)$$

cu $l_1 + l_2 = L$



BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY




b) în mișcarea oșcilatorie la momentul (t)

$$\vec{F'}_{e_1} + \vec{F'}_{e_2} = m\vec{a},$$

în proiecție:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -K_1(l_1 + x - l_0) + K_2(l_2 - x - l_0) \qquad (2)$$

Din (1) și (2) rezultă

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -(K_1 + K_2)x$$ ecuația mișcării oșcilatorii de pulsație $\omega = \sqrt{\frac{K_1+K_2}{m}}$, a cărei soluție este

$x(t) = A \sin(\omega t + \psi)$. Constantele A și $\psi$ se determină din combinatiile inițiale $t_0=0$, $x_{(0)}=x_0$, $v_{(0)}=0$, astfel încît:

$$x_{(t)} = x_0 \sin\sqrt{\frac{K_1+K_2}{m}}t$$

c)Noua pulsație a sistemului oscilant va fi $\omega' = \sqrt{\frac{K_1+K_2}{\Delta m + m}}$

În urma alipirii lui $\Delta m$ la trecerea prin poziția de echilibru se conservă impulsul: $mv_{max} = (m+\Delta m)v'_{max}$, de unde

$v'_{max} = \frac{mx_0\omega}{m+\Delta m}$, și cum $v'_{max} = \omega' A'$, găsim noua amplitudine $A' = x_0\sqrt{\frac{m}{m+\Delta m}}$

d) Energia oscilatorului înainte de atașarea lui $\Delta m$:

BCU ASE / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$Em_0 = \frac{m\omega^2 A^2}{2} = \frac{(K_1 + K_2)x_0^2}{2}$$

și după:

$$Em = \frac{(m_1 + \Delta m)\,\omega'^2 A'^2}{2} = \frac{(K_1 + K_2)x_0^2}{2} \cdot \frac{m}{m+\Delta m}$$

Rezultă $Em < Em_0$, pierderea de energie

$$\Delta Em = \frac{(K_1 + K_2)x_0^2}{2} \cdot \frac{\Delta m}{m+\Delta m}$$

este datorată lucrului de deformare la ciocnirea plastică, care se disipă (în atmosferă), sub formă de căldură.

d) Da, întrucît corpul m are la sfîrșit de cursă energia potențială maximă $(K_1 + K_2)\, x_0^2/2 = Em_0$, din care se scade energia pierdută prin impact, $\Delta Em$, calculată la d). Deci prin poziția de echilibru, corpul $(m+\Delta m)$ va trece cu o viteză maximă $v'_{max} < x_0\omega$ și își va continua cursa în partea cealaltă pînă la o amplitudine mai mică A' (ambele calculate la c))

* **12.**

Corpul de masă M legat prin resorturi de lungimi identice de lungime nedeformată $L_0$ și constanta K poate alunec[ ] frecare pe o tijă orizontală. În poziția de

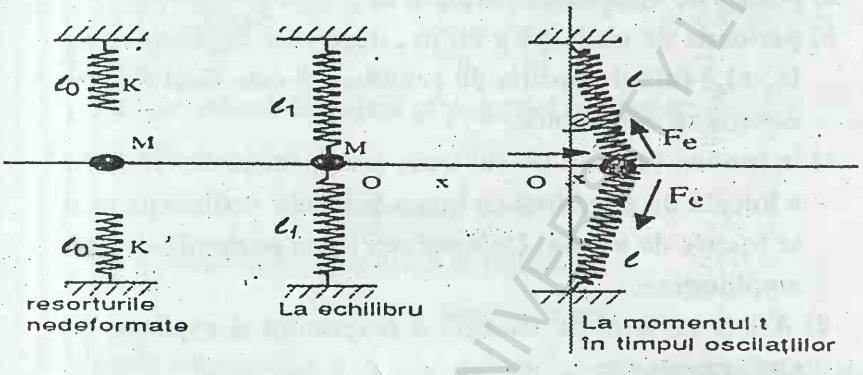
poate aluneca fără

BCU CLUJ / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

echilibru resorturile au lungimea $l_1$.

a) să se afle frecvența oscilațiilor transversale ale corpului de masă M.

b) Să se compare această frecvență cu cea a oscilațiilor longitudinale ale aceluiași corp care ar evolua între cele două resorturi.




## REZOLVARE

a) În poziția de echilibru resorturile sînt tensionate cu $T_0=K(l_1-l_0)$. În oscilație, la momentul t, asupra lui M acționează pe direcția elongației proiecțiile celor două forțe elastice egale $F_e= K(l-l_0)$.

Principiul fundamental al dinamicii ne conduce la ecuația de mișcare a corpului M în lungul axei Ox:

$$M\frac{d^2x}{dt^2}=-2K(l-l_0)\sin\theta \cong -2K(l-l_0)\frac{x}{l}=-2K\left(1-\frac{l_0}{l}\right)x$$

În cazul micilor oscilații ($\theta$ f. mic) raportul $\frac{x}{l_1}<1$, iar $\frac{x^2}{l_1^2}<<1$, deci putem scrie:

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{l_1}\left(1 + \frac{x^2}{l_1^2}\right)^{-1/2} \cong \frac{1}{l_1}\left(1 - \frac{x^2}{2l_1^2}\right)$$

introducînd în ecuația de mișcare obținem :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{2Kx}{M}\left[1 - \frac{l_0}{l_1}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{x2}{l_1^2}\right)\right]$$

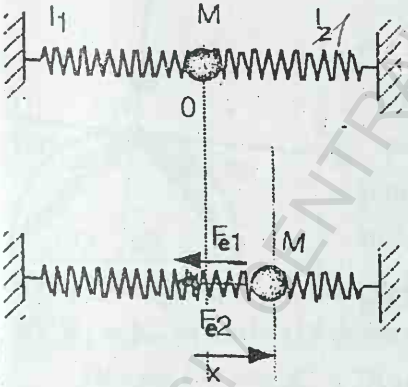
Dacă neglijăm termenii în $x^3$, obținem ecuația:

$\frac{d^2x}{dt^2} \cong -\frac{2K}{M l_1}(l_1 - l_0)x$ , deci în primă aproximație estevorba de o mișcare oscilatorie liniar armonică de pulsație:

$\omega^2 = \frac{2K}{M l_1}(l_1 - l_0) = \frac{2To}{M l_1}$ a cărei soluție este de forma:

$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$

b) Comparăm acum pulsațiile mișcărilor oscilatorie longitudinală și transversală:




Pentru aflarea pulsației oscilațiilor longitudinale presupunem resorturile tensionate în poziția de echilibru cu $l_1 - l_0$. În timpul oscilațiilor la momentul t , fie x elongația unui resort și respectiv – x a celuilalt. Ecuația de mișcare , pentru orice $l_1$ (orice valoare a tensiunii inițiale) va fi :

$Fe_1 + Fe_2 = -K(l_1 + x - l_0) + K(l_1 - x - l_0) = -2Kx = M\ddot{x}$

de unde pulsația oscilațiilor longitudinale :



BCU "ȘTEFAN CEL MARE" UNIVERSITY LIBRARY

$$\omega_{long} = \sqrt{\frac{2K}{M}}$$

$$\omega_{trans} = \sqrt{\frac{2K(l_1 - l_0)}{Ml_1}}$$

raportul lor $\frac{\omega_{long}}{\omega_{trans}} = \sqrt{\frac{l_1}{l_1 - l_0}}$ Rezultă $\omega_{long} > \omega_{trans}$ întotdeauna.

## 13.

Un corp de masă m este suspendat prin două resorturi de constante $K_1$ și $K_2$ și de lungimi nedeformate $lo_1$ și $lo_2$ între două puncte situate pe aceași verticală și distanțate cu a $(a > lo_1 + lo_2)$.

Să se determine :

a) Poziția de echilibru a corpului m considerat de dimensiuni neglijabile ;

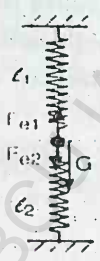
b) Pulsația și perioada oscilației libere neamortizate a corpului ;

c) Ecuația de mișcare, dacă la $t_0 = 0$ corpul este în poziție de echilibru și i se imprimă viteza $v_0$.

Aplicație numerică :

$K_1 = 6000$ N/m , $K_2 = 4000$ N/m , $lo_1 = 40$ cm , $lo_2 = 30$ cm , $a = 1$ m , $m = 100$ Kg iar $v_0 = 0{,}9$ m/s

REZOLVARE




La echilibrul

$mg = Fe_1 - Fe_2 = K_1(l_1 - l_{10}) - K_2(l_2 - l_{20})$ (1)

cu $l_1 + l_2 = a$

Rezultă :

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$l_1 = \frac{mg + K_1 l_{10} + K_2(a - l_{20})}{K_1 + K_2} = 0{,}62 \text{ m}$$

și

$l_2 = a - l_1 = 0{,}38$ m

b) În mișcare la momentul t :

$$mg - K_1(l_1 - x - l_{10}) + K_2(l_2 + x - l_{20}) = -m\ddot{x} \qquad (2)$$

Din (1) și (2) rezultă :

$$-(K_1 + K_2)x = m\ddot{x} \qquad (3)$$

ecuație ce descrie o mișcare armonică cu pulsația:

$$\omega = \sqrt{\frac{K_1 + K_2}{m}} = 10 \text{ s}^{-1}$$

și perioada

$T = 0{,}628$ s

c) Soluția ecuației (3) este de forma :

$x_{(t)} = A \sin(\omega t + \varphi)$

care în condițiile inițiale date

$(t_0 = 0 , x_{(0)} = 0 , v_{(0)} = 0{,}9$ m/s)

devine

$x_{(t)} = 0{,}09 \sin 10\, t$

## 14.

a) Să se rezolve problema precedentă știind că masa m întîmpină din partea aerului o rezistență proporțională cu viteza și după fiecare oscilație completă amplitudinea scade de p ori .

b) să se evalueze energia mecanică relativă $\frac{\Delta Em}{Em}$ disipată în timpul o perioadă.

Aplicație numerică p = 12

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

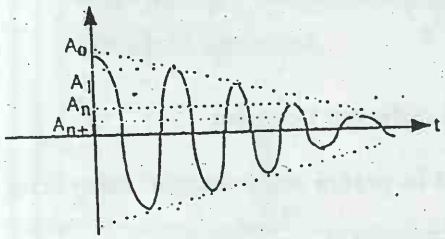
REZOLVARE

a) Ecuația de mișcare devine :

$$\ddot{x} + \frac{C}{m}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

unde

$$\omega_0^2 = \frac{K_1 + K_2}{m}$$




Mișcarea este pseudoperiodică, amortizată cu pulsația

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - \frac{C^2}{4m^2}$$ , cu soluția

$$x(t) = A_0 e^{-\frac{C}{2m}t} \sin(\omega_1 t + \varphi)$$

$$p = \frac{An}{An+1} = e^{\frac{C}{2m}T_1}$$

Notînd cu $\alpha = \frac{C}{2m}$, și înlocuind $T_1$ cu $\frac{2\pi}{\omega_1}$ ,rezultă:

$$\alpha = \frac{\omega_0 \ln p}{\sqrt{4\pi^2 - (\ln p)^2}} \cong 4{,}36\ s^{-1}$$

Pseudopulsația este $\omega_1 = 9\ \frac{rad}{s}$

Așa încît soluția devine

$$x(t) = Ae^{-4.36t} \sin(9t + \varphi)$$

Punînd aceleași condiții inițiale ($t_0 = 0$ , $x_0 = 0$ , $v_0 = 0{,}9$ m/s) găsim în final

$$x_{(t)} = 0{,}1\, e^{-4{,}36} \sin 9t$$

b) $$\frac{\Delta E_m}{E_m} = 1 - e^{-2\alpha} = 1 - e^{-8.72} = 1 - 136\ 10^{-6} \cong 0{,}999837$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

## 15.

**Un punct material este obligat să se miște pe un jgheab circular le rază r și este legat de două resorturi de constante elastice $K_1$ ți $K_2$ și de lungimi nedeformate neglijabile de extremitățile liametrului AB.**

**a) Să se determine poziția de echilibru și reacțiunea cercului în :azul în care $K_1 \neq K_2$.**

**b) Să se arate că dacă $K_1 = K_2 = K$ atunci punctul se află în echilibru în orice poziție pe cerc**

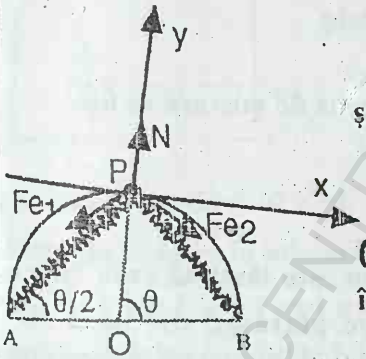
**Poate oscila corpul sub acțiunea resorturilor?**

### REZOLVARE

a) $\vec{F}e_1 + \vec{F}e_2 + \vec{N} = 0$

pr. Ox: $-Fe_1 \sin\theta/2 + Fe_2 \cos\theta/2 = 0$ (1)

pr. Oy: $N - Fe_1 \cos\theta/2 - Fe_2 \sin\theta/2 = 0$ (2)




cu

$Fe_1 = K_1\, 2r \cos\theta/2$

și $Fe_2 = K_2\, 2r \sin\theta/2$

Din (1): $K_1 \sin\theta = K_2 \sin\theta$

pentru $K_1 \neq K_2$, soluția $\theta = 0$ sau $\pi$ (corpul m e în A sau în B, un resort întins, celălalt relaxat)

Atunci $N = 2r\ K_1$ sau $N = 2r\ K_2$

b) $K_1 = K_2$ ecuația (1) devine identitate

$2Kr \sin\theta/2 \cos\theta/2 = 2Kr \sin\theta/2 \cos\theta/2$

Echilibrul se realizează pentru orice $\theta$

$N = 2Kr$

Nu oscilează



BCU "Ş. I. CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

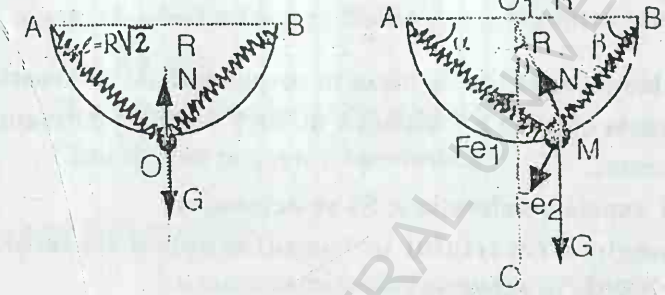
10.

Pe fundul unei emisfere de rază R se găsește în echilibru un corp de masă m atașat între două resorturi identice, netensionate, de constantă K, prinse cu celălalt capăt al lor în punctele A și B, extremitățile diametrului orizontal. Se scoate corpul din echilibru și este lăsat să oscileze liber.

a) scrieți ecuația de mișcare a corpului m pe suprafața sferei, luînd drept variabilă unghiul făcut de raza sa vectoare cu verticala.

b) Găsiți ecuația de mișcare în cazul micilor oscilații ($\theta \leq 6^0$) și apoi pulsația acestor oscilații.

REZOLVARE




a) Poziția de echilibru în O.

Față de O fie M poziția instantanee a mișcării, determinată de unghiul $\theta$ sau de perechea $\alpha = 45^0 - \theta/2$ și $\beta = 45^0 + \theta/2$

Legea de mișcare a lui m pe cerc:

$$-I_O\ddot{\theta} = \mathcal{M}_{G/O} + \mathcal{M}_{Fe_1/O} + \mathcal{M}_{Fe_2/O} = mgR\sin\theta + Fe_1R\cos(\alpha+\theta) + Fe_2R\sin(\alpha+\theta)$$

unde: $Fe_1 = K(AM - AO) = KR\sqrt{2}(\cos\theta/2 + \sin\theta/2 - 1)$

iar $Fe_2 = K(BO - BM) = KR\sqrt{2}(1 - \cos\theta/2 + \sin\theta/2)$

BCU CLUJ / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Rezultă:

$mg/R \sin\theta + K(\cos\theta/2 - \sin\theta/2)\,|\cos\theta/2 + \sin\theta/2 - 1| +$

$+ K(\cos\theta/2 + \sin\theta/2)\,|1 - \cos\theta/2 + \sin\theta/2| = -\ddot{\theta}\, m$

Rezultă în final:

$$\ddot{\theta} + g/R \sin\theta + 2K/m \sin\theta/2 = 0$$

b) Pentru $\theta < 5^0$, punem $\sin\theta \cong 0$ iar $\sin\theta/2 \cong \theta/2$, în ecuația de mișcare care va descrie o oscilație armonică :

$$\frac{mg}{R}\theta + K\theta = -m\ddot{\theta}$$

cu $\omega = \sqrt{\frac{g}{R} + \frac{K}{m}}$

## 17.

De-a lungul unei tije de masă m suspendată de un resort cu constanta elastică K , alunecă un inel cilindric cu masa M, cu frecare.

Inelul capătă accelerația a. Să se determine:

a) alungirea resortului în timpul mișcării inelului, considerînd tija în echilibru;

b) presupunînd că inelul se oprește brusc la capătul inferior al tijei de lungime l, unde se află un opritor, să se descrie mișcarea ulterioară a sistemului.

Se dau:

$m = 1$ Kg., $M = 2$ Kg., $a = 2 m/s^2$ , $l = 0{,}5m$

REZOLVARE

a) În timpul deplasării inelului. forța de frecare

$F_f = M(g - a)$.

Pentru tijă: $Fe - F_f - mg = 0$.

de unde alungirea resortului

$$x = \frac{(m+M)g - Ma}{K}$$

Aplicație numerică x= 26 mm

b) Inelul ajunge la opritor cu viteza: $v=\sqrt{2al}$

După impact viteza sistemului va fi

$$v_0 = \frac{M\sqrt{2ab}}{M+m} = 0{,}94 \text{ m/s}$$

Ea devine viteză inițială a sistemului (M+m) în oscilație.

Poziția de echilibru a oscilatorului va fi dată de condiția $(M+m)g = Ks_0$, deci

$s_0 = \frac{(M+m)g}{K} = 0{,}03$m. Față de această poziție de echilibru, poziția inițială $x_0$ va fi :

$x_0 = x - s_0 = -0.03+0{,}026 = -0.004$m.

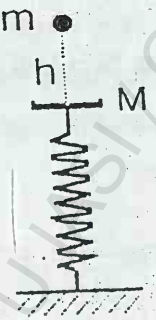
Pulsația oscilatorului este

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{M+m}} = 18{,}1 \text{ rad/s.}$$

Cu condițiile inițiale prezentate ecuația de mișcare va fi:

$x_{(t)} = 0.052 \sin (18{,}1\, t - 4{,}4^0)$

## 18.




Un corp de masă m este lăsat să cadă liber de la înălțimea h pe platanul de masă M susținut de resortul de constantă K. Să se determine legea de mișcare a sistemului după impactul lui m cu platanul. dacă:

a) ciocnirea este plastică

b) ciocnirea este elastică

REZOLVARE

a) La ciocnirea plastică viteza după impact va fi :

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$v_1 = \frac{-m\sqrt{2gh}}{M+m}$ . Noua poziție de echilibru a sistemului se va afla la distanța $x_1 = \frac{mg}{K}$ mai jos decît punctul de ciocnire, așa încît, pentru oscilatorul format condițiile inițiale vor fi :

$t_1 = 0$ , $v_1 = -\frac{m\sqrt{2gh}}{M+m}$ , $x_1 = \frac{mg}{K}$

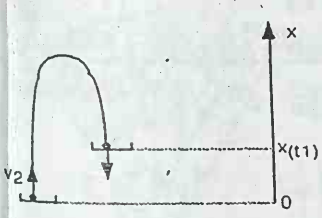
Pulsația oscilatorului fiind $\omega = \sqrt{\frac{K}{M+m}}$ , ecuația de mișcare în raport cu poziția de echilibru va fi:

$$x_{(t)} = A \sin \left(\sqrt{\frac{K}{M+m}}\, t + \varphi\right)$$

unde, din condițiile inițiale

$$A = \frac{mg}{K}\sqrt{1 + \frac{2Kh}{g(M+m)}}$$ , iar

$$\varphi = -\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{M+m}{2ghK}}$$




b) După ciocnirea elastică viteza platanului $v_1$ devine:

$$v_1 = \frac{-2m\sqrt{2gh}}{M+m}$$

iar a bilei $v_2 = \frac{M-m}{M+m}\sqrt{2gh}$ și va fi orientată în sus dacă M > m.

Platanul va intra în mișcare oscilatorie descrisă de

$x_{(t)} = A \sin \left(\sqrt{\frac{K}{M}}\, t + \varphi\right)$ unde $\varphi = 0$ și $A = -\frac{2m}{M+m}\sqrt{\frac{2ghm}{K}}$ în conformitate cu condițiile inițiale. Deci

$$x_{(t)} = -\frac{2m}{M+m}\sqrt{\frac{2ghm}{K}} \sin\sqrt{\frac{K}{M}}\, t$$

Bila se va ridica pînă la $h_1 = \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2 h$ după care va recădea pe platan după un anumit timp $t_1$. Va reîntîlni platanul în poziția $x_{(t_1)}$ și avînd viteza $v_{(t_1)}$. Momentul reîntîlnirii se va deduce din



BCU CLUJ CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

condiția :

$x_{platan}(t_1) = x_{bilă}(t_1)$ adică

$$-\frac{2m}{M+m}\sqrt{\frac{2ghm}{K}}\sin\sqrt{\frac{K}{M}}t_1 = \frac{M-m}{M+m}\sqrt{2gh}\ t_1 - g\frac{t_1^2}{2}$$

Se rezolvă ecuația transcendentă și se găsește momentul $t_1$ la care bila coboară, deci pentru care $v(t_1) < 0$.

Se determină și viteza platanului la momentul $t_1$, se aplică din nou legile ciocnirii elastice și se reia raționamentul cu noua viteză inițială și poziție inițială a platanului și respectiv a bilei.

## 19.

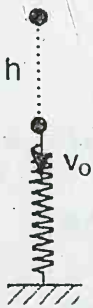
Un corp cu masa m este lăsat să cadă liber de la înălțimea h asupra unui resort de masă neglijabilă avînd lungimea inițială $l_0$ și constanta elastică K. Corpul rămîne atașat și suferă o frecare fluidă cu coeficientul r mic.

$(r < 2\sqrt{Km})$

Să se determine legea de mișcare.

Cînd devine mișcarea aperiodică?

### REZOLVARE




La momentul inițial corpul are viteza:

$v_0 = -\sqrt{2gh}$ și față de poziția de echilibru se află la

$x_0 = \frac{mg}{K}$.

Legea sa de mișcare va fi soluția ecuației:

$$\ddot{x} + \frac{r}{m}\dot{x} + \frac{K}{m} = 0$$

Dacă $r \leq 2m\ \omega_0$, unde $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$ mișcarea este oscilatorie amortizată, descrisă de:

$$x(t) = A\, e^{-\frac{r}{2m}t} \sin(\omega_1 t + \varphi)$$

unde $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{r^2}{4m^2}}$ ; iar A și $\varphi$ sînt soluțiile sistemului

BUJIAN CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\begin{cases} \frac{mg}{K} = A\sin\varphi \\ \sqrt{2gh} = A\left(\frac{r}{2m}\sin\varphi - \omega_1\cos\varphi\right) \end{cases}$$

adică $\varphi = \text{arctg}\ \frac{2m\omega_1 g}{rg - 2K\sqrt{2gh}}$ iar $A = \frac{mg}{K}\sqrt{1 + \frac{(r - 2K\sqrt{\frac{2h}{g}})^2}{4\omega^2{}_1 m^2}} =$

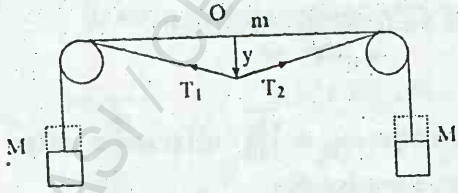
$$= \frac{mg}{K}\sqrt{1 + \frac{(2K\sqrt{\frac{2h}{g}} - r)^2}{4m^2\omega^2{}_0 - r^2}}$$

Mişcarea nu poate deveni aperiodică datorită amortizării căci $r < 2\sqrt{Km}$ , din enunț; ea ar fi aperiodică dacă bila ar comprima total resortul. (s-ar izbi de pămînt)

## * 20.

Calculați perioada micilor oscilații ale unui corp de masă m prins la mijlocul firului orizontal de lungime 2L care susține masele egale M din figură (m<<M)

### REZOLVARE




Ecuația de mișcare a corpului (m) :

$\vec{T_1} + \vec{T_2} + mg = m\,a$

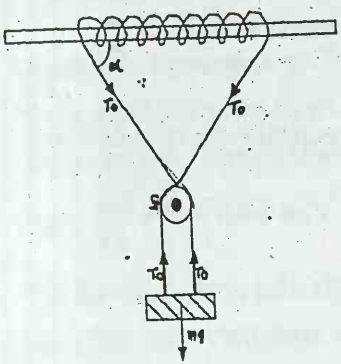
unde $T_1 = T_2 = Mg$

Proiectînd pe axa verticală, neglijînd mg (m<<M) și ținînd seama că y <<L, rezultă:

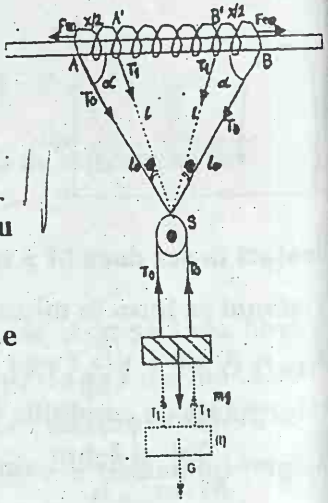
$m\ddot{y}$ cu pulsația $\omega = 2\sqrt{\frac{Mg}{mL}}$ și perioada $T = \pi\sqrt{\frac{mL}{Mg}}$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

21.



Studiați micile oscilații ale sistemului din figură. Scripetele fix S are două șanțuri pe care pot aluneca fără frecare firele inextensibile ce susțin masa m. Se dă unghiul $\alpha$ pe care îl fac firele cu tija orizontală pe care este înfășurat resortul de constantă elastică K și masa neglijabilă, cînd masa m este în echilibru. Aflați perioada micilor oscilații ale lui m, considerînd că deplasările resortului pe tijă sînt fără frecare.



## REZOLVARE

La echilibru $2T_0 \cos\alpha = F_{e_0} = Kx_0$

unde $x_0$ este comprimarea la echilibru a resortului, iar $mg = 2T_0 = \frac{Kx_0}{\cos\alpha}$

În oscilație, la momentul t, legea se mișcare va fi:

$m\ddot{y} = -2T_1 + mg$

unde elongația $y = l - l_0 = \frac{x}{2}$,

x fiind comprimarea suplimentară a resortului la momentul t.

Noua tensiune

$$T_1 = \frac{Fe}{2\cos(\alpha+\theta)} = \frac{K(x_0+x)}{2\cos(\alpha+\theta)} = \frac{Kx_0 + 2Ky}{2\cos(\alpha+\theta)}$$

BCU "I.C. BRĂTIANU" CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

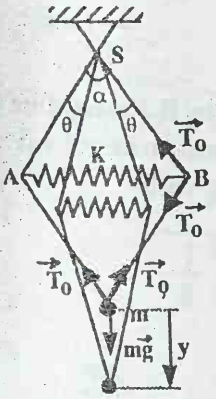
Legea mișcării oscilatorii devine

$$m\ddot{y} = -\frac{Kx_0}{\cos(\alpha+\theta)} - \frac{2Ky}{\cos(\alpha+\theta)} + mg$$

Pentru micile oscilații se poate neglija $\theta$ și scrie $\cos(\alpha+\theta) \approx \cos\alpha$, și ținînd cont de condiția de echilibru, găsim: $m\ddot{y} = -\frac{2Ky}{\cos\alpha}$, ecuație ce reprezintă o mișcare oscilatorie armonică de pulsație $\omega = \sqrt{\frac{2K}{m\cos\alpha}}$ și perioadă $\tau = 2\pi\sqrt{\frac{m\cos\alpha}{2K}}$

## 22.

Studiați micile oscilații ale sistemului din figură format din 4 tije rigide identice de mase neglijabile și un resort de constantă elastică K, știind că în poziția de echilibru a masei m, tijele din S fac între ele unghiul $\alpha$.




REZOLVARE

La echilibru $F_e = Kx_0 = 2T_0 \sin\frac{\alpha}{2}$

iar $2T_0 \cos\frac{\alpha}{2} = mg$

În mișcare rombul se alungește, la momentul t cu $y = 2l(\cos\frac{\alpha-\theta}{2} - \cos\frac{\alpha}{2})$, unde $\theta$ este un unghi foarte mic.

Comprimarea suplimentară a resortului, în mișcare oscilantă, la momentul t:

$x = 2l(\sin\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha-\theta}{2})$

Noua forță elastică $F_{e(t)} = K(x_0 + x) = 2T\sin\frac{\alpha-\theta}{2}$, unde T este noua tensiune în tijă. De aici:

$$2T = \frac{Kx_0 + Kx}{\sin\frac{\alpha-\theta}{2}} = \frac{mg\,tg\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha-\theta}{2}} + \frac{K}{\sin\frac{\alpha-\theta}{2}} \cdot \frac{y(\sin\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha-\theta}{2})}{\cos\frac{\alpha-\theta}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}}$$

$$= mg\,\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha-\theta}{2}} + \frac{K}{\sin\frac{\alpha-\theta}{2}}\,\frac{2\sin\frac{\theta}{4}\cos\frac{2\alpha-\theta}{4}}{-2\sin\frac{\theta}{4}\sin\frac{2\alpha-\theta}{4}}\,y$$

Ecuația de mișcare a masei m în oscilație:

$$m\ddot{y} = 2T\cos\frac{\alpha-\theta}{2} - mg$$

devine

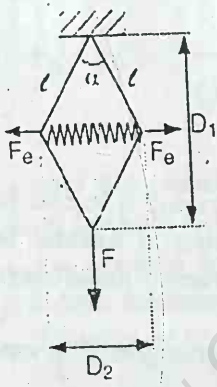
$$m\ddot{y} = mg\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha-\theta}{2} - Ky\,\frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\theta}{4}\right)}{\sin\frac{\alpha-\theta}{2}}\cos\frac{\alpha-\theta}{2} - mg$$

Cum $\theta$ este foarte mic, el poate fi neglijat, așa încît ecuația aproximativă este:

$$m\ddot{y} = -Ky\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}$$

și deci, mișcarea are perioada $\tau = \frac{2\pi}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{m}{K}}$

## O metodă mai simplă :




Deformările diagonalelor fiind

$$y = \Delta D_1 = \Delta\,(2l\cos\frac{\alpha}{2}) = \frac{dD_1}{d\alpha}\,d\alpha =$$

$$= -l\sin\frac{\alpha}{2}\,\Delta\alpha$$

și $x = \Delta D_2 = \Delta(2l\sin\frac{\alpha}{2}) = l\cos\frac{\alpha}{2}\,\Delta\alpha$.

raportul lor devine :

$\frac{y}{x} = -\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ . Relația între F și Fe (metoda lucrului mecanic virtual) : $Fy + F_e x = 0$ ne conduce la $F = F_e \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$

unde $F_e = K(x_0 + x) = K(x_0' + y\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2})$

Ecuația de mișcare a masei m sub acțiunea forței $\vec{F}$ și a greutății sale $\vec{G}$ va fi în proiecție pe Oy: $mg - K(x_0 + y\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2})\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = ma_y$

Cum la echilibru $mg - Kx_0 = 0$ , ecuația de mișcare devine:

$-Ky\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} = ma_y$, descriind o oscilație cu pulsația

$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ și perioada $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

## 23.

Se dau două oscilații armonice descrise de ecuațiile :
$a_1 = \sqrt{2} A_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$ și $a_2 = \sqrt{2} A_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$
Să se determine valoarea medie pe o perioadă a produsului $a_1 a_2$.

REZOLVARE

$$a_1 a_2 = A_1 A_2 [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \cos(2\omega t + \varphi_1 + \varphi_2)].$$

$$\int_0^T a_1 a_2 \, dt = A_1 A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) T - \frac{A_1 A_2}{2} \sin(2\omega t + \varphi_1 + \varphi_2) \Big|_0^T$$

$$= A_1 A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) T$$

$$< a_1 a_2 >_T = A_1 A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

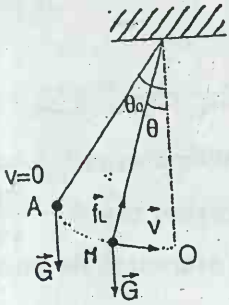
## 24.

Un pendul gravitațional de masă m și sarcină q se află în cîmp magnetic uniform de inductie B orientat normal la planul traiectoriei. Studiați care din mărimile următoare depind de inducția magnetică și cum:
a) viteza instantanee a pendulului. Se presupune $\theta_0$ amplitudinea lui unghiulară si l lungimea sa.
b) tensiunea in fir în ambele cazuri de orientare a lui $\vec{B}$.
c) perioada micilor oscilații.

REZOLVARE

a) Viteza instantanee nu depinde de $\vec{B}$, întrucît forța Lorentz $= qv\vec{B}$ este perpendiculară pe viteză, orientată în lungul firului [illegible]os, după sensul lui B, așa încît aplicînd teorema de

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

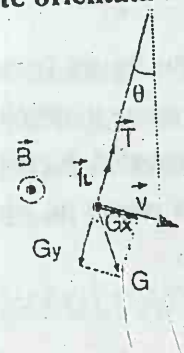



variație a energiei cinetice între punctel A(amplitudine unghiulară $\theta_0$) și (deviație unghiulară θ instantanee), for Lorentz dă un lucru mecanic nul fiin perpendiculară pe deplasare.

Rămîne:

$$\frac{mv^2}{2} = mgl(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

b) Tensiunea în fir se modifică prin prezența lui $\vec{B}$. Dacă este orientată în sus, ea va fi:




$$T = mg\cos\theta + \frac{mv^2}{l} - qvB$$

Dacă se inversează sensul cîmpului magne

$$T = mg\cos\theta + \frac{mv^2}{l} + qvB$$

c) perioada nu depinde de $\vec{B}$. Ecuația mișc oscilatorii include doar componența lui G direcția tangențială(Gx=mg sinθ)

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta \cong -\frac{g}{l}\theta \quad \text{deci} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

## 25.

Asupra unui pendul matematic de masă m și sarci electrică q>0 , aflat la suprafața pămîntului aplicăm cîmp electric omogen,uniform $\vec{E}$ dat.

a)Să se deducă formula pentru perioada oscilațiilor m ale pendulului în acest caz ;

b)Cazuri particulare:

1° $\vec{E} \uparrow\uparrow \vec{g}$;

2° $\vec{E} \uparrow\downarrow \vec{g}$;

3° $\vec{E} \perp \vec{g}$;

BCU IAȘI - CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

## REZOLVARE

a) Pendulul va oscila în jurul unei poziții de echilibru determinate de rezultanta cîmpurilor gravitațional și electric :

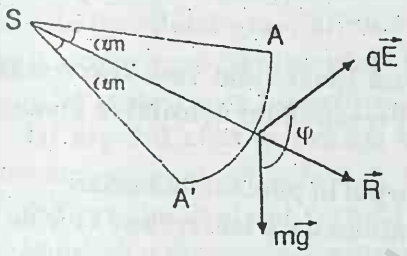
$$\vec{R} = q\vec{E} + m\vec{g}.$$

Deci în expresia perioadei pendulului vom înlocui pe $|\vec{g}|$ cu $\frac{|\vec{R}|}{m}$, astfel:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{|q\vec{E} + m\vec{g}|}} =$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,\frac{1}{\sqrt[4]{1 + 2\left(\frac{qE}{mg}\right)\cos\varphi + \left(\frac{qE}{mg}\right)^2}}$$ unde $\varphi$ este unghiul

între $\vec{E}$ și $\vec{g}$ (v. fig.)




1° $\varphi = 0$ $\quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{qE}{mg}}}$

2° $\varphi = \pi$ $\quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,\frac{1}{\sqrt{\left|1 - \frac{qE}{mg}\right|}}$

3° $\varphi = \frac{\pi}{2}$ $\quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,\frac{1}{\sqrt[4]{1 + \left(\frac{qE}{mg}\right)^2}}$

## 26.

**Găsiți perioada micilor oscilații ale mercurului într-un tub în formă de U, avînd secțiunea S, ale cărui ramuri comunică cu două vase identice de volum V, ce conțin mase egale din același gaz ideal, aflate inițial la presiunea atmosferică $p_0$.**

**În timpul oscilațiilor se consideră că gazul suferă transformări adiabatice.**

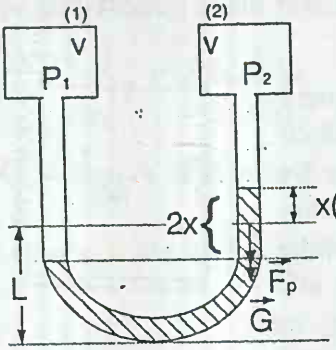
**Se dă** $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$.

**Înălțimea coloanei de mercur din fiecare ramură este inițial L.**



BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

## REZOLVARE




Fie $p_1, V_1$ și respectiv $p_2, V_2$ presiunile și volumele gazelor în cele două ramuri, în urma denivelării 2x produse la momentul t între nivelul mercurului din cele două ramuri.

$V_1 = V + Sx$

$V_2 = V - Sx$

Transformarea fiind adiabatică, ne permite să scriem:

$$p_1 V_1^{\gamma} = p_2 V_2^{\gamma} = p_0 V^{\gamma}$$

de unde $p_1 = p_0 \left(\frac{V}{V+Sx}\right)^{\gamma}$ și $p_2 = p_0 \left(\frac{V}{V-Sx}\right)^{\gamma}$

Diferența de presiune exercitată de gaze asupra mercurului dă naștere unei forțe de revenire

$$F_p = p_0 S \left[\frac{1}{\left(1-\frac{Sx}{V}\right)^{\gamma}} - \frac{1}{\left(1+\frac{Sx}{V}\right)^{\gamma}}\right] \cong 2 p_0 \frac{S^2 x}{V} \gamma$$

căci am considerat $x << V/S$ și am putut dezvolta binoamele după formula : $(1 \pm \varepsilon)^n \cong 1 \pm n\varepsilon$

La această forță se adaugă și forțele de revenire datorate greutății coloanei de mercur de înălțime 2x

Ecuația va fi:

$Ma = -Fp - G$ , adică:

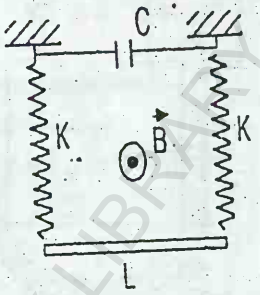
$$2LS\rho \frac{d^2x}{dx^2} + 2Sx\,\rho\, g + 2p_0\gamma \frac{S^2x}{V} = 0$$

Ecuația $\frac{d^2x}{dx^2} + \left(\frac{g}{L} + \frac{p_0\gamma S}{LV\rho}\right)x = 0$ ne arată că oscilația mercurului este armonică și are pulsația $\omega^2 = \frac{g}{L} + \frac{p_0\gamma S}{LV\rho}$ iar perioada

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L\rho}{\rho g + \frac{p\gamma S}{V}}}$$

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

## 27.




Un conductor de masă M și lungimea l este suspendat în poziție orizontală cu ajutorul a două resorturi identice de constantă elastică K. Capetele superioare ale resorturilor sînt unite printr-un condensator C. Tot sistemul se află într-un cîmp magnetic omogen, cu inducția magnetică B, perpendicular pe planul de oscilație. Conductorul este deplasat din poziția de echilibru și apoi eliberat. Să se stabilească legea de mișcare a conductorului, neglijînd rezistențele conductorului.

### REZOLVARE

La echilibru $Mg - 2Kx_0 = 0$

În timpul deplasării barei de lungime l în cîmp magnetic apare o t.e.m. de inducție $E_{(t)} = Blv$ care va încărca condensatorul cu sarcina instantanee $q_{(t)} = CBlv$ (dacă considerăm nule rezistențele conductorilor). Curentul de încărcare $i_{(t)} = \frac{dq}{dt} = CBla$ va interacționa cu cîmpul magnetic, creînd o forță electromagnetică $F = Bil$ ce va acționa asemenea forței elastice, ca forță de revenire. Ecuația de mișcare a oscilațiilor în cîmp magnetic va fi:

$Ma = Mg - K(x + x_0) - CB^2l^2a$ sau $(M + CB^2l^2)a = -2Kx$, de unde

$$\omega = \sqrt{\frac{2K}{M + CB^2l^2}}$$

iar $x_{(t)} = A \cos \left( \sqrt{\frac{2K}{M + CB^2l^2}}\, t \right)$

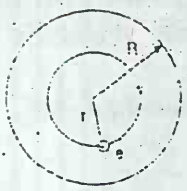
## 28.

Atomul este descris de modelul Thomson ca o sferă uniform încărcată cu sarcina electrică pozitivă în care se găsesc electroni. Arătați că mișcarea radială a electronilor este oscilatorie armoni-

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

că și găsiți expresia perioadei.

REZOLVARE



Fie Q sarcina pozitivă a sferei de rază R. Densitatea de sarcină $\rho = \frac{3Q}{4\pi R^3}$

Aplicînd teorema lui Gauss găsim intensitatea cîmpului la r<R:

$E\,4\pi r^2 = \rho \frac{4\pi r^3}{3\varepsilon_0}$, deci $E = \frac{\rho\, r}{3\varepsilon_0} = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$. Forța de revenire:

$$F = -eE = -\frac{eQr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = -m\omega^2 r$$

Se obține: $\omega = \sqrt{\frac{eQ}{4\pi\varepsilon_0 R^3 m}}$, $T = 2\pi\sqrt{\frac{4\pi\varepsilon_0 R^3 m}{eQ}}$

## 29.

Un corp cade liber într-un tunel vidat care traversează Pămîntul prin centrul său. Presupunînd densitatea planetei constantă,calculați:

a)după cît timp revine corpul în punctul de lansare;

b)viteza în centrul Pămîntului,dacă lansarea se face de la suprafață.

(Se cunosc $R_p$ și $g_0$ care se ia în considerare încă de început)

REZOLVARE

a)Accelerația gravitațională la distanța r<Rp se obține aplicînd teorema lui Gauss:

$4\pi r^2 g = 4\pi K m$, unde $m = M_p \frac{r^3}{R_p^3}$ reprezintă partea din masa Pămîntului conținută de sfera de rază r.

Notînd $g_0 = \frac{KM_p}{R_p^2}$ accelerația gravitațională la suprafața planetei ($g_0 = 9{,}8\ m/s^2$),

rezultă $g = g_0 \frac{r}{R_p}$ sau,ținînd seama de orientare: $a = -\frac{g_0}{R_p} r$

Ultima expresie reprezintă ecuația oscilatorului armonic.

$a = -\omega^2 r$ . deci $\omega = \sqrt{\frac{g_0}{R_p}}$, $T = 2\pi \sqrt{\frac{R_p}{g_0}} \cong 5000s$

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

b)Corpul oscilează armonic,amplitudinea oscilațiilor este egală cu Rp, poziția de echilibru în centrul planetei:

$v_m = \omega A = \sqrt{g_0 R_p} = 7{,}9$ km/s (prima viteză cosmică)

Observație: Accelerația poate fi calculată pe baza legii atracției universale,înlăturînd pătura sferică de deasupra corpului.

## 30.

Un corp de masă m este atîrnat de un fir cu modulul de elasticitate $E = 9{,}8 \cdot 10^5$ N/m și aria secțiunii transversale $S = 3$ mm$^2$.

a) Să se determine m știind că perioada oscilațiilor orizontale (pendulul gravitațional) este de două ori maimare decît a celor verticale (pendul elastic)

b) Să se deseneze traiectoria dacă:

1)Corpului aflat în poziția de echilibru i se imprimă o mișcare sub un unghi $\alpha$ față de verticală ;

2) Corpului deplasat vertical față de poziția de echilibru i se imprimă o mișcare orizontală.

REZOLVARE

a) Perioadele oscilațiilor orizontale și respectiv verticale cu expresia:

$$T_g = 2\pi\sqrt{l/g}\text{, respectiv } T_e = 2\pi\sqrt{ml/SE}\text{, } m = \frac{ES}{4g} = 75g$$

b) În ipoteza micilor oscilații,cele două grade de libertate sînt decuplate,astfel încît ecuațiile parametrice ale traiectoriei vor fi:

$$\begin{cases} x = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) \\ y = A_2 \sin(2\omega t + \varphi_2) \end{cases}$$

1) $t = 0$, $x = 0$, $y = 0$, $v_{x,y} \neq 0$. Ecuațiile de mișcare se vor scrie:

$x = A_1 \sin \omega t$ , $y = A_2 \sin 2\omega t$ . Eliminînd t se obține ecuația traiectoriei:

$$y = \pm 2\frac{A_2}{A_1} x \sqrt{1 - \frac{x^2}{A_1^2}},$$



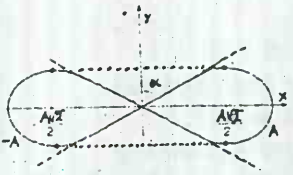
BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Între amplitudini avem relația:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{v_{y_0}}{v_{x_0}} = 2\frac{\omega A_2}{\omega A_1} = \frac{2A_2}{A_1}$$

Notînd $A_1 = A = 2A_2/\operatorname{ctg}\alpha$, ecuația traiectoriei devine:

$$y = \pm x \operatorname{ctg}\alpha \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}$$ , iar reprezentarea grafică:



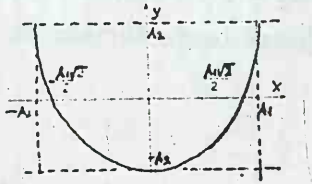
2) Condițiile inițiale $t = 0$, $x = 0$, $v_x = v_0$; $y = -A_2$, $v_y = 0$, duc la următoarea formă a ecuațiilor de mișcare:

$$x = A_1 \sin \omega t,$$

$$y = -A_2 \cos 2\omega t.$$

Eliminînd timpul, se obține ecuația traiectoriei:

$$y = A_2 \left(2\frac{x^2}{A_1^2} - 1\right)$$ , care este o parabolă.



## 31.

**O particulă oscilează în lungul axei Ox după legea: $x_{(t)} = A\sin(\omega t + \varphi)$. Calculați probabilitatea de a găsi particula în intervalul (x, x+dx)**

## REZOLVARE

Particula traversează intervalul dx în $dt = dx / v_{(x)}$, de două ori la fiecare oscilație. Probabilitatea va fi:

$$dP = \frac{2dt}{T} = \frac{2dx}{Tv_{(x)}}$$ ,



BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$v_{(x)}$ se găsește din ecuațiile mișcării: $x = A\sin(\omega t+\varphi)$, respectiv $v_{(t)} = \omega A\cos(\omega t+\varphi)$, eliminînd partea armonică:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{\omega^2 A^2} = 1 \text{, sau } v_{(x)} = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

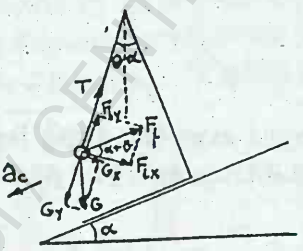
Înlocuind se obține probabilitatea căutată:

$$dP = \frac{dx}{\pi\sqrt{A^2 - x^2}}$$

## 32.

**Suportul unui pendul gravitațional de lungime l este fixat pe un cărucior care coboară pe un plan înclinat. Pendulul are o perioadă de oscilație egală cu cea pe care o are corpul cu care este realizat cînd oscilează liber într-un lichid de densitate $\rho_0$. Cunoscînd $\rho/\rho_0 = 4$, să se calculeze unghiul planului înclinat. Se neglijează toate forțele de rezistență.**

REZOLVARE



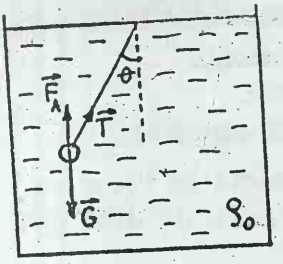

Accelerația la coborîre pe plan fiind $a_c = g \sin\alpha$, asupra masei m aflate în sistemul neinerțial al suportului acționează pe lîngă greutatea $\vec{G}$ și forța de tensiune T, o forță de inerție $\vec{F_i} = -m\vec{a_c}$ Așa încît mișcarea oscilatorie va fi descrisă de ecuația :

$m\ddot{x} = -mg\sin\theta - mg\sin\alpha\cos(\alpha+\theta)$ care în cazul micilor oscilații $\sin\theta \cong \theta \cong x/l$, devine

$$\ddot{x} = -\left(\frac{g}{l}\cos^2\alpha\right)x - \frac{g}{2}\sin 2\alpha$$

Perioada mișcării oscilatorii va fi $T = 2\pi/\cos\alpha\sqrt{\frac{g}{l}}$

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY




La mișcarea în lichid din G se scade forța arhimedică de sens contrar $F_A$, așa încît legea oscilației devine:

$$m\ddot{x} = -(mg - \rho_0 V_c g)\sin\theta \quad \text{sau}$$

$$\ddot{x} = -\frac{g}{l}x + \frac{\rho_0}{\rho}g\frac{x}{l}, \quad \text{adică}$$

$$\ddot{x} = -\frac{g}{l}\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)x \text{ cu perioada}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{g}{l}\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)}$$

Egalînd cele două expresii pentru perioadă, obținem: $\cos\alpha = \sqrt{3}/2$, deci $\alpha = 30°$.

## 33.

Un corp de masă m se află pe o masă netedă la jumătatea distanței L dintre un perete și extremitatea unui resort de constantă K, inițial nedeformat.

a) I se imprimă corpului m viteza inițială v spre resort. Studiați graficul vitezei și coordonatei mișcării sale, știind că la ciocnirea cu peretele, coeficientul de restituire al vitezei este k.

b) Graficul forței în funcție de coordonata x.

c) Spațiul și timpul parcurs după n "oscilații complete".

d) Spațiul parcurs în oscilație elastică pînă la oprire.

### REZOLVARE

a) de la O la A timpul scurs

$$t_{OA} = \frac{L}{2v}$$

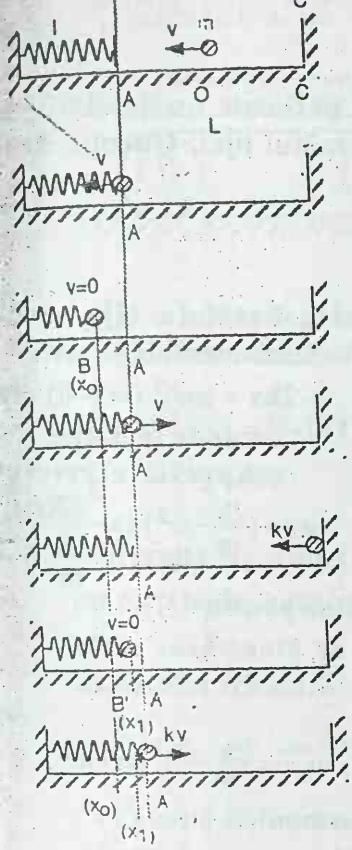
Între A și B teorema conservării energiei ne conduce la

$x_0 = v\sqrt{\frac{m}{k}}$ Timpul scurs de la A la B și înapoi la A:

$$t_{AB} + t_{BA} = \pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{T}{2}$$

Timpul de la A la C

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY




$t_{AC} = \frac{L}{v}$

La înapoiere, de la C la A

$t'_{CA} = \frac{L}{kv}$

Din teorema conservării energiei între A și B' rezultă

$x_1 = kv\sqrt{\frac{m}{k}} = k\,x_0$, iar timpul

$t_{AB'} = t_{B'A} = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}$

Urmează $t'_{AC} = \frac{L}{kv}$ și după ciocnire

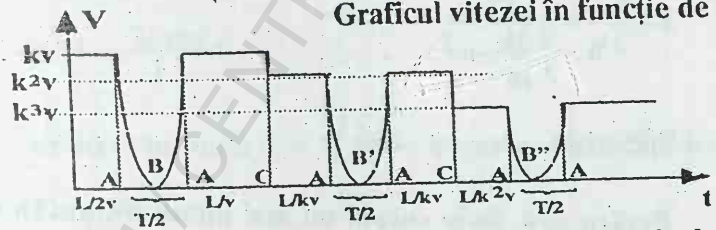
$t''_{CA} = \frac{L}{k^2v}$ . După care

$x_2 = k^2v\sqrt{\frac{m}{k}}$

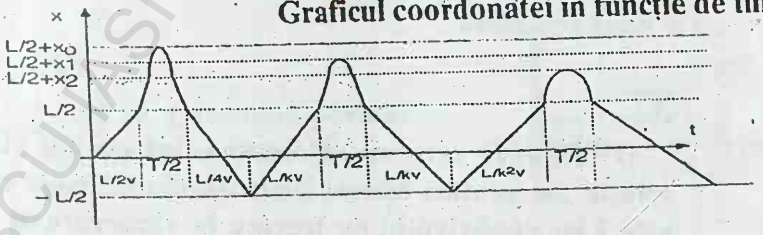
pînă în B''($x_2$) în timpul

$t_{AB''} = t_{B''A} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}$ etc.

Graficul vitezei în funcție de timp.

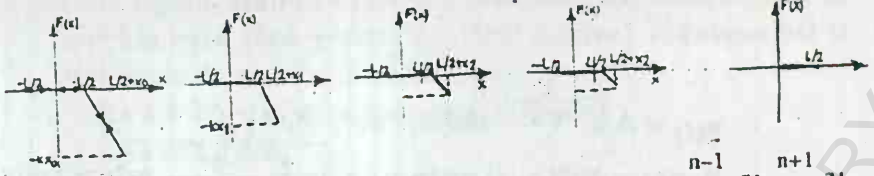



Graficul coordonatei în funcție de timp.






BCU FSIȚEI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY



c) $S_n=(2n+1)L+2x_0\frac{1-k^{n+1}}{1-k}$ ; $t_n=n\frac{T}{2}+\frac{L}{2v}\frac{10-4k^{n-1}-3k^{n}-3k^{n+1}}{k^n(1-k)}$

d) $S_{el.\ opr}=\frac{2x_0}{1-k}$

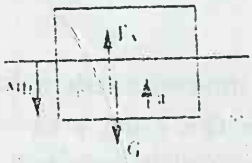
## 34.

Un disc de înălțime l și secțiune S, cu densitatea ρ est... lăsat să cadă vertical într-un lichid de densitate $\rho_0$ ( $\rho_0>$...

a) Să se studieze mișcarea discului considerînd... rezistența întîmpinată de corp la înaintarea în lichid... nulă și că la momentul inițial corpul este lăsat liber... fundul la nivelul suprafeței libere al lichidului.

b) Dar, dacă se ia în considerare și frecarea cu lichid... Pentru ce valori ale raportului $\rho/\rho_0$ problema are sens...

REZOLVARE



Aplicînd principiul fundamental al... micii și luînd ca variabilă înălțimea x a... țiunii scufundate, vom avea ecuația de mișca... re: $m\vec{a}=\vec{F}_A+\vec{G}$, ceea ce revine la

$$\ddot{x}=-(\rho_0 g/\rho l)\,x+g \qquad (1)$$

Pulsația oscilațiilor va fi $\omega_0=\sqrt{\rho_0 g/\rho l}$

iar soluția ecuației (1) $x_{(t)}=A\sin(\omega t+\varphi)+\rho l/\rho_0$

Punînd condițiile inițiale $t_0=0$, $x_0=0$, $v_0=0$ rezultă

$\varphi=\pi/2$ și $A=-\rho l/\rho_0$ , așa încît: $x_{(t)}=\rho l/\rho_0\,(1-\cos\omega_0 t)$

Condiția de oscilație $2A\le l$ ne conduce la $\rho/\rho_0\le 1/2$

b) Legea de mișcare în cazul oscațiilor cu frecare va fi

$m\vec{a}=\vec{F}_A+\vec{G}+\vec{F}_f$, ce revine la :

$$\ddot{x}+(\rho_0 g/\rho l)\,x+(r/\rho lS)\dot{x}=g \qquad (2)$$

unde am notat prin r coeficientul de frecare fluidă ($\vec{Fr}=-r\vec{v}$)

Soluția ecuației(2) va fi de forma :



BCU IAȘI / CENTRUL UNIVERSITAR

$$x_{(t)} = A\, e^{-\frac{r}{2\rho lS}t} \sin(\omega_1 t + \varphi) + l\rho / \rho_0 \qquad (3)$$

dacă $r < 2\rho lS\omega_0$ şi unde $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{r^2}{4\rho^2 l^2 S^2}}$ este pseudopulsaţia oscilaţiilor amortizate descrise de (3)

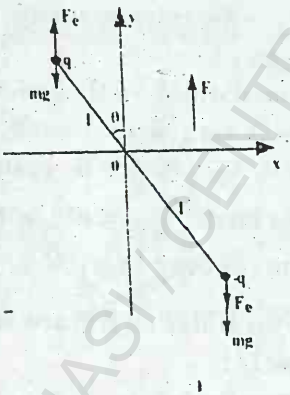
Punînd aceleaşi condiţii iniţiale, găsim $A = -\frac{\rho l}{\rho_0 \sin\varphi}$ unde $\varphi$ dat de $\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\omega_1 \rho lS}{r}$

## 35.

O tije electroizolantă de masă neglijabilă şi lungime 2l, avînd fixate la capete două mase punctiforme egale şi purtînd sarcini egale şi de semne contrare (q şi – q) se poate roti în jurul axului său O, în planul xOy, într-un cîmp elecrostatic uniform E, dirijat în lungul axei Oy.

Determinaţi masa m a fiecărui corp, astfel încît perioada micilor oscilaţii în jurul poziţiei de echilibru să fie T.

REZOLVARE




Legea de mişcare a sistemului

$$-2ml^2\ddot{\theta} = (Fe + mg + Fe - mg)l \sin\theta$$

devine în cazul micilor oscilaţii

$$-ml\ddot{\theta} = qE \sin\theta \cong qE\theta$$

Pulsaţia oscilaţiilor

$$\omega^2 = \frac{qE}{ml}$$

deci

$$m = \frac{qET^2}{4\pi^2 l}$$

## 36.

Un corp de masă m poate culisa pe o tijă de lungime 2l, fiind ancorat de capetele acesteia cu două resorturi identice cu constanta de elasticitate k. Întregul sistem este rotit uniform cu viteza unghiulară $\omega$ în jurul unei axe perpen-

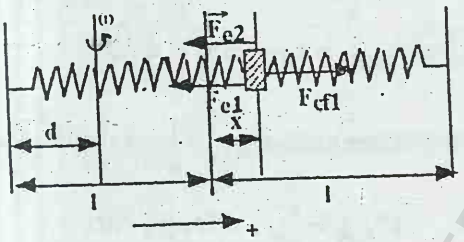


BCUIASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

diculare pe tijă.

Găsiți poziția de echilibru și perioada oscilațiilor, cînd axa trece la distanța d față de capătul tijei. Discuție după valoarea vitezei unghiulare.

## REZOLVARE




Față de tijă, ecu
fundamentală se scrie:

$-2kx + m\omega^2 (l+x-d) = r$

de unde se obține expresia accelera

$$a = -\left(\frac{2k}{m} - \omega^2\right)\left[x - \frac{\omega^2(l-d)}{\frac{2k}{m} - \omega^2}\right.$$

Poziția de echilibru ($a = 0$) se obține pentru

$$x = x_0 = \frac{\omega^2(l-d)}{\frac{2k}{m} - \omega^2}$$

Notînd cu $x - x_0 = y$ elongația și $\omega_0^2 = \frac{2k}{m} - \omega^2$ avem:

$a = -\omega_0^2 y$, ecuația oscilatorului armonic.

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2k}{m} - \omega^2}}$$

Discuție

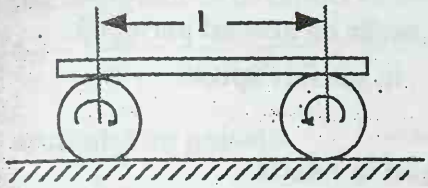
Pentru $\omega^2 > 2k/m$ corpul nu mai poate fi ținut în echilib cele două resorturi.

## 37.

O scîndură este așezată orizontal pe doi cilindri rotație, în sensuri opuse. Distanța dintre axele cilindr este l iar coeficientul de frecare la alunecare al scînd este $\mu$. Să se afle perioada de oscilație a scîndurii.

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

REZOLVARE




În poziția de echilibru reacțiunile sînt egale

$N_1 = N_2 = mg/2$

și la fel cele două forțe de frecare

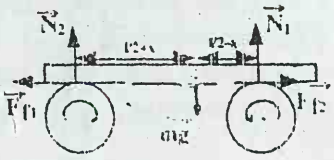
$\vec{F}_{f1} = -\vec{F}_{f2}$.

La o mică deplasare x a unuia din punctele de contact reacțiunile se vor modifica. Din sistemul:

$$\begin{cases} N_1(l/2 - x) = N_2(l/2 + x) \\ N_1 + N_2 = mg \end{cases}$$

Rezultă $N_1 = mg/l\ (l/2 + x)$ și $N_2 = mg\ (l/2 - x)$ și corespunzător lor forțele de frecare: $F_{f1} = \mu N_1$ și $F_{f2} = \mu N_2$ de sensuri opuse, a căror rezultantă va juca rolul de forță de revenire în cursul oscilațiilor scîndurii.

$$F_r = F_{f1} - F_{f2} = \frac{2\mu mgx}{l}$$




Ecuația de mișcare a oscilatorului armonic corespunzător

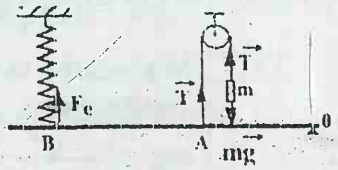
$$m\ddot{x} = -\frac{2\mu mg}{l}x$$

ne oferă pulsația $\omega = \sqrt{\frac{2\mu g}{l}}$ și perioada oscilațiilor

$T = \pi\sqrt{2l/\mu g}$

## 38.

Să se determine perioada micilor oscilații ale corpului de masă m suspendat






BUCHAREST CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

ca în figură, știind că resortul este ideal de constantă k, că pîrghia este fără greutate , firul perfect inextensibil și scripetele de masă nulă și fără frecări.

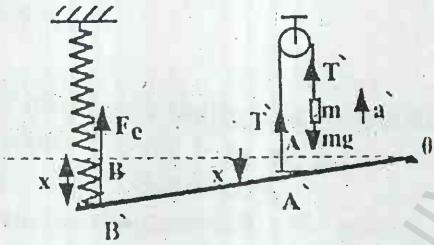
La echilibru pîrghia este orizontală, iar AO/BO = 1/3 .

## REZOLVARE

La echilibru
Fe/T = 1/3 iar T= mg ,
deci

$$mg = 3k\,\Delta l_0$$

unde $\Delta l_0$ este alungirea inițială a resortului.




În mișcare la momentul t, fie x alungirea suplimentară a resortului și a` accelerația masei m . Legea sa de mișcare va fi:

$$ma' = -T' + mg$$

unde

$$a' = x'' = \frac{\ddot{\lambda}}{3}$$

iar

$$T' = 3Fe' = 3k\,(x+\Delta l_0)$$

Înlocuind, obținem :

$$m\ddot{x} = -9k(x+\Delta l_0) + 3mg$$

sau ținînd cont de condiția de echilibru:

$$m\ddot{x} = -9kx$$

ceea ce reprezintă ecuația mișcării armonice de perioadă

$$T = 2\pi\sqrt{9k/m} = 6\pi\sqrt{k/m}$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

## 39.

**Pe axa unui inel de rază R şi masă M , încărcat cu sarcină electrică Q distribuită uniform, se poate mişca o particulă de masă m , având sarcina q , de semn opus ($Qq < 0$) .**

**Să se studieze micile oscilaţii în jurul poziţiei de echilibru dacă:**

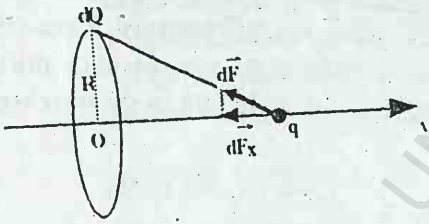
**a) inelul este fix ;**

**b) inelul se poate mişca.**

**Se meglijează pierderea de energie prin rotaţie.**

### REZOLVARE

**a) Din simetria problemei rezultă orientarea forţei exercitate de inel asupra particulei pe direcţia axei Ox.**




**Elementul de sarcină dQ exercită forţa**

$$dF = \frac{|qdQ|}{4\pi\varepsilon_0(R^2+x^2)}$$

**care contribuie cu**

$$dFx = -\frac{qdQx}{4\pi\varepsilon_0(R^2+x^2)^{3/2}}$$

**Forţa rezultantă va fi :** $F = \dfrac{|qQ|}{4\pi\varepsilon_0(R^2+x^2)^{3/2}}\,x$

**Pentru $x << R$ (ipoteza micilor oscilaţii) forţa este de tip elastic :**

$$F = -\frac{|qQ|}{4\pi\varepsilon_0 R^3}x$$

**Micile oscilaţii ale particulei vor fi armonice cu perioada :**

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{4\pi\varepsilon_0 R^3 m}{|qQ|}}$$

**b) Mişcarea relativă a celor două corpuri se face sub acţiunea forţei de tip elastic şi corespunde unei particule de masă**

$$m_r = \frac{mM}{m+M}$$



BCU IAŞI - CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Cele două corpuri vor oscila cu aceeași perioadă

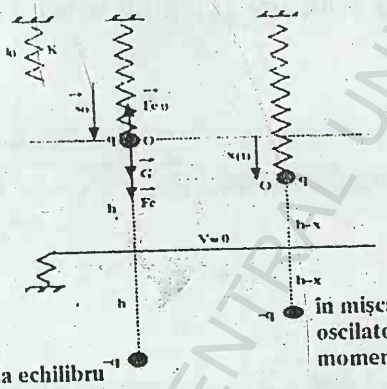
$T' = 2\pi\sqrt{\frac{4\pi\varepsilon_0 R^3 m_r}{|qQ|}}$ , în sensuri opuse.

Amplitudinile se vor găsi în relația

$A_1 m = A_2 M$

## 40.

Studiați micile oscilații ale unui corp de masă m, încărc cu sarcina q, legat de un resort elastic izolator, de constan elastică K dacă corpul atârnat în poziția sa de echilibru s află la distanța h de un plan conductor legat de pământ. S consideră amplitudinea oscilațiilor mică în raport distanța h .




REZOLVARE

Deoarece potențialul cii conductoare trebu rămână nul, e de pres existența unei sarcini fi (imaginare) situate sim față de plan și având contrar lui q .

La echilibru vom avea $\vec{Fc} + \vec{Feo} + \vec{G} = \vec{O}$ , deci

$$mg + \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 4h^2} - Ks_0 = 0 \qquad (1$$

În mișcare , la momentul t, principiul fundamental al din ne conduce la:

$$mg + \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 4(h-x)^2} - K(s_0 + x) = ma \qquad (2$$

Din (1) și (2) rezultă :

$$ma = -Kx + \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{(h-x)^2} - \frac{1}{h^2}\right)$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

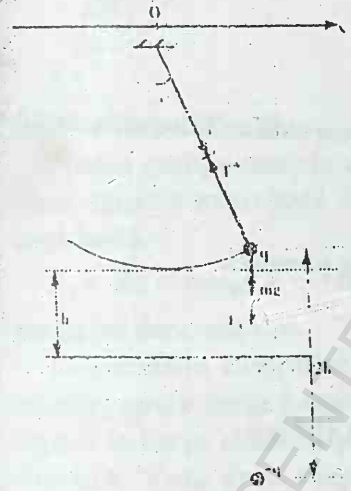
sau neglijând $x^2$ în raport cu $h^2$ și x în raport cu h :

$a = -\left(\frac{K}{m} - \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 h^3 m}\right)x$, deci mișcarea poare fi considerată

armonică cu pulsația $\omega = \sqrt{\frac{K}{m} - \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 h^3 m}}$

## 41.

**O sferă mică cu sarcina q și masa m este suspendată de un fir cu lungimea L. La distanța h, sub sferă, se află un plan conductor orizontal. Să se determine perioada micilor oscilații efectuate în plan vertical.**




*(O.F. etapa județeană Buc.1993)*

### REZOLVARE

Interacțiunea electrostatică poate fi descrisă substituind planul conductor cu o sarcină "imagine" –q, simetrică față de q .

Forța de revenire va fi:

$$F = +\left(mg + \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0(2h')^2}\right)\sin\alpha$$

În ipoteza micilor oscilații $h' \cong h$ , $F_x \cong -F$ .

Punând $\sin\alpha = x/l$ se obține o forță rezultantă de tip elastic:

$$F_x = -\left(mg + \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 h^2}\right)\frac{x}{l}$$

Micile oscilații vor fi armonice , cu perioada:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l} + \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 h^2 lm}}}$$

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

## 42.

La capetele unui segment de lungime 2a sint fixate două sarcini identice Q. O particulă cu masă m și sarcină q se poate mișca :

1) în lungul segmentului ;

2) pe mediatoare

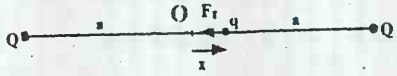
Arătați pe ce direcție pot avea loc oscilații ale particulei și expresia perioadei (considerând amplitudinea mică) dacă:

a) $Qq > 0$

b) $Qq < 0$

### REZOLVARE

Se consideră m masa corpului de sarcină q atât de mică încât greutatea ei să fie neglijabilă față de forțele coulombiene.




a) Pentru $q > 0$ oscilațiile sunt longitudinale. Forța de revenire

$$F_r = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0(a+x)^2} - \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0(a-x)^2} \cong \frac{-Qqx}{\pi\varepsilon_0 a^3}$$

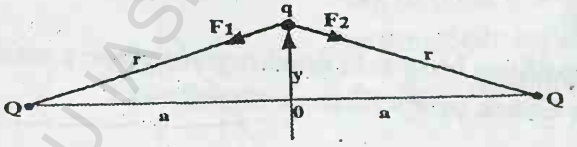
Ecuația de mișcare

$\vec{F}_r = m\vec{a}$ (neglijând mg) în proiecție pe axa longitudinală:

$a = -\frac{Qq}{\pi\varepsilon_0 a^3 m} x$ determină o mișcare oscilatorie armonică

cu pulsatia

$\omega_l = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{Qq}{\pi\varepsilon_0 am}}$, iar ecuația elongației $x_{(t)} = A_l \cos \omega_c t$




b) Pentru $q < 0$ rezultă oscilații transversale

$$F1 = F2 \Rightarrow \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0(a^2+y^2)}$$

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

componentele lor orizontale își fac echilibrul, cele verticale ționează ca forță de revenire :

$$F_r = 2F_{1y} = 2\,\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0(a^2+y^2)}\sin\theta = \frac{Qqy}{2\pi\varepsilon_0(a^2+y^2)^{3/2}}$$

cum $y << a$ $\quad Fr = \dfrac{Qqy}{2\pi\varepsilon_0 a^3}$

Legea de mișcare (neglijând mg)

$$m\ddot{y} = -\frac{Qq}{2\pi\varepsilon_0 a^3}\,y$$

este a unei mișcări oscilatorii de pulsație

$$\omega_{tr} = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{Qq}{2\pi\varepsilon_0 ma}}$$

și descrisă de: $y_{(t)} = A_{tr}\cos\omega_{tr}\,t$

## 43.

**Presupunem că într-o regiune limitată de plasma neutră de densitate n apare la un moment dat în mic exces de sarcină care corespunde unui deficit într-o regiune învecinată și că distribuțiile acestor sarcini ar fi uniforme și paralele.**

**Descrieți procesul "oscilațiilor" sarcinilor între doi "pereți" delimitatori ai zonei de-a lungul unei axe normale Ox . Determinați-le frecvența la o concentrație n $\sim 10^6$ electr/cm$^3$**

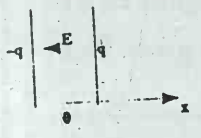
### REZOLVARE

**Câmpul electric uniform între cele două regiuni plane paralele este dat de teorema Gauss; proiecția sa pe direcția ox :**

$$(1) \qquad E_x = -\frac{q}{\varepsilon_0 S}$$



BCU CLUJ CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY




unde S este aria suprafeței plane.

Legea de mișcare a unui electron de ma
m și sarcină $e^-$ va fi:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = e E_x \quad (2)$$

Considerând q sarcina deplasată de cei n electroni d
unitatea de volum de pe unul din pereți pe celălalt.

$q = n e S x$

Derivarea sa de două ori , ne conduce la ecuația diferenți
unde am ținut cont de (1) și (2) :

$$\frac{d^2q}{dt^2} = n e S \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{n^2 e S}{m} E_x = -\frac{ne^2}{\varepsilon_0 m} q$$

Ecuația $\frac{d^2q}{dt^2} = -\frac{ne^2}{\varepsilon_0 m} q$

descrie o oscilație armonică a sarcinilor între cele două reg
cu pulsația : $\omega_p^2 = \frac{ne^2}{\varepsilon_0 m}$

numită frecvența de oscilație a plasmei.

Soluția ecuației

$q_{(t)} = Q_0 \sin(\omega t + \varphi)$

$$\omega^2 = \frac{10^6 \cdot 2{,}56 \cdot 10^{-38}}{8{,}85\, 10^{-12} 9{,}1\, 10^{-31}} \cong 3\, 10^9\ s^{-2}$$

$\nu \sim 5\, 10^4$ Hz

## 44.

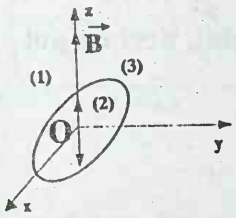
Arătați că orice mișcare de vibrație armonică, de
direcție, poate fi descompusă intr-o componentă armonică
lingul lui Oz și două mișcări circulare de aceeași pulsa
planul xOy, una în sens orar, cealaltă în sens antiorar.

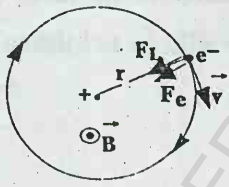
Considerând că acestea ar putea fi posibilități

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

oscilație ale unui electron optic supus acțiunii unei forțe elastice din partea atomului și că aplicăm un câmp magnetic exterior de inducție magnetic B de-a lungul lui Oz , să se determine frecvențele obținute în cazul unei observări spectroscopice în prezența câmpului perpendicular pe acesta și respectiv paralel cu acesta . (efect Zeemann normal)

## REZOLVARE




Pentru prima parte v. probl. nr 1. Frecvența componentei oscilatorii (1) în lungul lui Oz, după care este orientat și câmpul magnetic B nu va fi modificată.

Pentru componentele circulare (2) și (3) în absența ctmpului, forța elastică exercitată din partea atomului, joacă rol de forță centripetă.

$F_e = Kr = m\omega_o^2 r$ unde $\omega_o^2 = K/m$ este pulsația proprie a oscilației descompuse.

În prezența câmpului magnetic perpendicular pe planul de rotație, apare forța Lorentz, care pentru rotația spre dreapta se adună la forța elastică, pentru cea spre stânga se scade din cea elastică. Vom avea respectiv, o modificare a frecvențelor de rotație:

pentru componenta ( 2 ) $Kr + e v_d B = m\omega_d^2 r$

$$K + e\omega_d B = m\omega_d^2 \quad \text{deci}$$

$$\omega_d = 1/2\, e/m\, B + \sqrt{\frac{e^2B^2}{4m^2} + \frac{K}{m}} \qquad (\text{căci } \omega_d > 0)$$

iar pentru componenta (3) $Kr - ev_S B = m\omega_S^2 r$ cu soluția

$$\omega_S = -(1/2)(e/m)B + \sqrt{\frac{e^2B^2}{4m^2} + \frac{K}{m}} \qquad (\omega_S > 0)$$

chiar pentru câmpuri magnetice puternice că

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

termenul $\frac{e^2 B^2}{4m^2} \sim 10^{-5}$ e neglijabil față de $k/m = \omega_0^2$

Putem lua drept valori ale frecvențelor celor două componente în câmp magnetic:

$\omega_d \cong (1/2)(e/m) B + \omega_0$ și

$\omega_S = \omega_0 - (1/2)(e/m) B$

Se remarcă o diferență $\Delta\omega = \pm (1/2)(e/m) B$ între frecvența câmpului și noile frecvențe.

În lungul câmpului apar două frecvențe diferite $\omega_0 \pm \Delta\omega$ care duc la dublarea liniei spectroscopice de frecvențe $\omega_0$ în câmp magnetic (dubletul Zeemann). Cele două componente sunt notate cu $\sigma$.

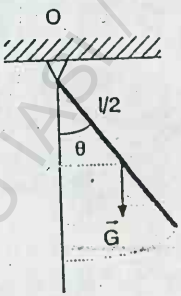
Perpendicular pe câmp se pot observa trei linii spectrale în loc de una : apare cea modificată $\omega_0$ (componenta $\pi$) și cele două modificate cu $\Delta\omega$, și anume $\omega_0 \pm \Delta\omega$ (componentele $\sigma$)

## 45.

O bară omogenă de masă m și lungime l este articulată în O și lăsată să oscileze în plan vertical cu amplitudine sub 5°.

Deduceți perioada. Se cunoaște momentul de inerție față de unul din capete $\mathcal{J}_0 = ml^2/3$

REZOLVARE




Ecuația de mișcare a barei este dată de

$\mathcal{M}_{tot}/0 = \mathcal{J}_0 \ddot{\theta}$

$-mg(l/2)\sin\theta = \frac{m l^2}{3}\ddot{\theta}$

Pentru micile oscilații și ecuația devine

$\ddot{\theta} = -\frac{3g}{2l}\theta$; oscilațiile vor fi armonice cu pulsația

$\omega = \sqrt{\frac{3g}{2l}}$, deci cu perioada $T = 2\pi\sqrt{\frac{2l}{3g}}$

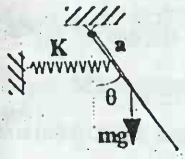
BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

## 46.

**a) Să se deducă perioada micilor oscilaţii ale unei bare rigide de lungime l şi masă m fixată la unul din capete şi legată la distanţa a de el de un resort de constantă k.**

**b) Dar dacă bara e înlocuită cu o tijă de masă neglijabilă, cu aceeaşi l la capătul căruia e prinsă masa m.**

### REZOLVARE




a) Legea de mişcare a barei:

$$\frac{ml^2}{3}\ddot{\theta} = -Fa\cos\theta - mg\frac{l}{2}\sin\theta$$

devine în cazul micilor oscilaţii:

$$\ddot{\theta} \cong -\left(\frac{3Ka^2}{ml^2} + \frac{3g}{2l}\right)\theta$$

Perioada mişcării va fi

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{3g}{2l} + \frac{3Ka^2}{ml^2}}}$$

b) $ml^2\ddot{\theta} = -Ka^2\cos\theta\sin\theta - mgl\sin\theta$

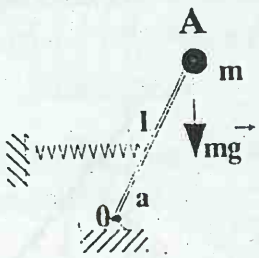
Pentru micile oscilaţii $\ddot{\theta} = -\left(\frac{Ka^2}{ml^2} + \frac{g}{l}\right)\theta$, perioada va fi

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{Ka^2}{ml^2} + \frac{g}{l}}}$$

## 47.

**Bara de lungime l şi masă neglijabilă este articulată în O şi are la capătul A o masă m.**

**La distanţa a de capătul O este prins un resort având constanta k şi lungime a nedeformată când bara OA este în poziţie verticală.**






BOLYAI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Să se determine pulsația proprie a mișcării masei m.

REZOLVARE

$$\omega = \sqrt{\frac{Ka^2}{ml^2} - \frac{g}{l}}$$

Condiția de existență a acestei soluții: $\frac{ka^2}{ml^2} - \frac{g}{l} > 0$

Interpretare:

Dacă resortul nu este suficient de tare, ($K > \frac{mgl}{a^2}$) în poziția cu tija verticală sistemul se află în echilibru instabil, deci nu pot avea loc oscilații.

## 48.

Discul de rază R oscilează ca pendul fizic în jurul unui ax situat la distanță r de centru.

Aflați raportul T(r)/T(R) și reprezentați-l grafic în funcție de raportul r/R. Am notat prin T(r) perioada de oscilație corespunzătoare axului fixat la distanța r de centru.

REZOLVARE

Legea de mișcare în jurul axului S, aflat la distanța r de O:

$$-r\,mg\sin\theta = J_{/S}\,\ddot{\theta}$$

unde momentul de inerție

$$J_{/S} = J_{/O} + mr^2 = \frac{mR^2}{2} + mr^2$$

Ecuația devine $\ddot{\theta} = -\frac{rg}{r^2 + \frac{R^2}{2}}\,\theta$ în cazul micilor oscilații.

Perioada va fi:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g} + \frac{R^2}{2rg}}$$

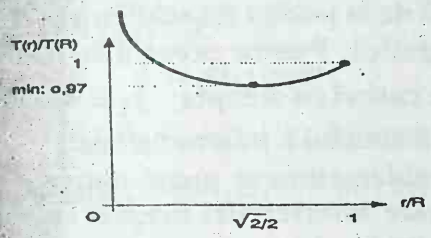
BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Dacă axul ar fi la periferia discului $T_{(R)} = 2\pi\sqrt{\frac{3R}{2g}}$

Raportul celor două perioade:

$\frac{T(r)}{T_{(R)}} = 2\pi\sqrt{\frac{2r^2+R^2}{3Rr}}$ este funcție de r, care are un minim pentru $r = R/\sqrt{2}$.

(v. reprezentarea grafică pentru $r/R \in [0,1]$)




## 49.

Să se determine perioada micilor oscilații ale următoarelor pendule fizice:

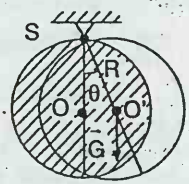
a) disc de rază R suspendat într-un punct de la periferia sa;

b) pătrat de latură a suspendat de unul din vârfuri;

c) triunghi echilateral de latură a suspendat de unul din vârfurile sale

## REZOLVARE

a) Scriem legea de mișcare sub forma;




$\mathcal{M}_{/S} = \mathcal{J}_{/S}\ddot{\theta}$ unde

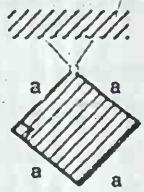
$\mathcal{J}_{/S} = \mathcal{J}_{/0} + MR^2 = \frac{3MR^2}{2}$

$-MgR\sin\theta = \frac{3MR^2}{2}\ddot{\theta}$

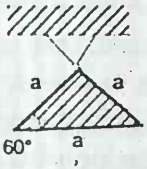
În cazul micilor oscilații $\sin\theta \cong \theta$, adică $\ddot{\theta} = -\frac{2g}{3R}\theta$ mișcarea $\theta$ cu pulsația

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$\omega = \sqrt{\frac{2g}{3R}}$ și perioada $T = 2\pi\sqrt{\frac{3R}{2g}}$.

b) 

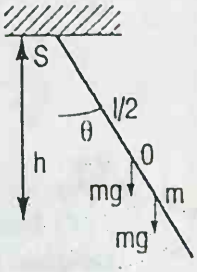

$T = 2\pi\sqrt{\frac{2a\sqrt{2}}{3g}}$

c) 


$T = 2\pi\sqrt{\frac{5a}{4\sqrt{3}g}}$

## 50.

**O tijă de lungime l oscilează în jurul unui ax care trece printr-un capăt al tijei. Un corp cu dimensiuni mici, având aceeași masă cu a tijei poate culisa pe aceasta.**




**Fie $T_0$ perioada tijei singure și $T_{(h)}$ perioada sistemului format din tijă și corpul fixat la distanța h față de ax;**

**a) Studiați raportul $T_{(h)}/T_0$**

**b) Pentru ce valoare a lui h avem $T_{(h)} = T_0$?**

**Ce interpretare dați faptului că perioada nu s-a modificat pentru această valoare a lui h?**

### REZOLVARE

**a) Perioada $T_0$ a tijei se deduce din ecuația de mișcare**

$-mg\frac{l}{2}\theta \cong \mathcal{J}_{/S}\cdot\ddot{\theta}$ unde $\mathcal{J}_{/S} = \frac{ml^2}{3}$

**Rezultă**

$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2l}{3g}}$

BCU IAȘI / CELT PAUL UNIVERSITY LIBRARY

Ecuația mișcării pendulului cu bila m aflată la distanța h de S este:

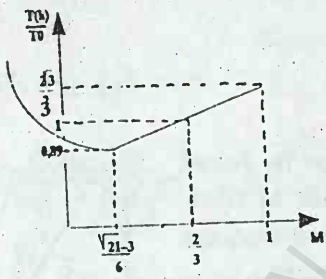
$$-mg\frac{l}{2}\theta - mgh\,\theta = \left(\frac{ml^2}{3} + mh^2\right)\ddot{\theta}$$ cu perioada $T_{(h)} =$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{2(l^2+3h^2)}{3g(2h+l)}}$$ Raportul $\frac{T(h)}{T_0} = \sqrt{\frac{l^2+3h^2}{(2h+l)l}}$ este

funcție de h și prezintă un

minim la $h = \frac{\sqrt{21}-3}{6}l$

b) Se observă că $T_{(h)}=T_0$ când $h=\frac{2l}{3}$

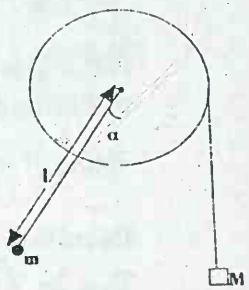



**Interpretare:**

**Tija omogenă de lungime l este echivalentă cu un pendul matematic de lungime 2/3 l. Cum perioada pendulului matematic nu depinde de masă, poate fi atașat la h= 2/3l un corp de masă arbitrară, fără ca perioada să se modifice.**

## 51.

**O bară fără masă, de lungime l este fixată rigid de un scripete fără masă de rază r. La capătul liber al barei se află un corp de masă m. Peste scripete este trecut un fir de al cărui capăt liber este agățat un corp de masă M. În ce condiții mișcarea sistemului va fi oscilatorie? (unghiul $\alpha$ dintre bară și verticală este zero la momentul inițial).**




**REZOLVARE**

**Din legea conservării energiei:**

$$\frac{\omega^2}{2}(ml^2 + Mr^2) = Mgr\alpha - mgl(1-\cos\alpha)$$

**unde $\omega$ este viteza unghiulară a scripetelui**

$$\omega = \sqrt{\frac{2(Mgr\alpha - 2mgl\sin^2\alpha/2)}{ml^2 + Mr^2}}$$



BCU IAȘI - CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Mişcarea oscilatorie poate avea loc dacă viteza unghiu
devine zero pentru o anumită valoare a unghiului $\alpha$, adică da

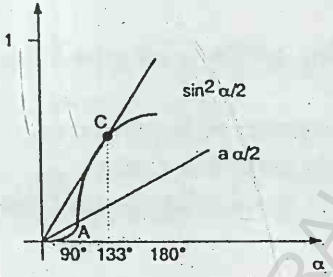
$$Mgr\alpha = 2mgl \sin^2 \alpha/2$$

cu notaţia $a = \frac{Mr}{ml}$ se obţine :

$$\frac{a\alpha}{2} = \sin^2 \alpha/2$$

Pentru fiecare valoare a constantei a, această ecuaţie tr
cendentă dă o deviere maximă de la poziţia de echilibru $\alpha$. E
ţia se rezolvă prin metoda grafică. Pentru aceasta se tras
curba $y = \sin^2 \alpha/2$ . Intersecţia curbei cu dreapta $y_1 = \frac{a\alpha}{2}$ v
un punct A care determină valoarea lui $\alpha$ pentru "a" dat.

În condiţiile iniţiale ale problemei nu se poate obţine o
valoare a lui $\alpha$ corespunzătoare intersercţiei dreptei cu o
ramură a curbei $y = \sin^2 \alpha/2$ .




Evident , soluţia ecuaţiei
diferită de zero doar dacă "a"
mai mic decât o anumită val
limită "$a_0$" determinată din con
ca dreapta $y_0 = a_0 \alpha/2$ să fie tang
la curba $y = \sin^2 \alpha/2$ (pct. C)

$\alpha_0 \cong 133°$, $a_0 \cong 0{,}73$ , $Mr/ml \leq$
oscilaţiile sunt posibile.

## 52.

Două pendule fizice au perioadele $T_1$ şi $T_2$ şi momente
de inerţie $\mathcal{J}_1$ şi respectiv $\mathcal{J}_2$ faţă de axa de oscilaţie. Da
se cuplează rigid cele două pendule, care va fi perioad
pendulului fizic rezultat,în jurul aceleişi axe de suspensie?

### REZOLVARE

Ecuaţia de mişcare a primului pendul :

$$\mathcal{J}_1 \ddot{\theta} = -m_1 g l_1 \theta$$

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITARY LIBRARY

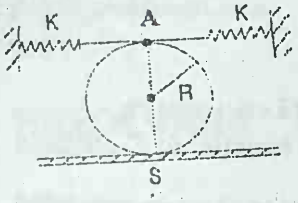
ne dă perioada sa $T_1 = \sqrt{\frac{\mathcal{I}_1}{m_1 g l_1}}$

Analog pentrual doilea pendul $T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{\mathcal{I}_2}{m_2 g l_2}}$ și pentru cele două corpuri cuplate rigid:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2}{m_1 g l_1 + m_2 g l_2}}$$

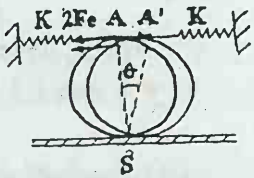
Din expresia lui $T_1$ scoatem $m_1 g l_1 = 4\pi^2 \mathcal{I}_1 / T_1^2$ iar din $T_2$ pe $m_2 g l_2 = 4\pi^2 \mathcal{I}_2 / T_2^2$ pe care le înlocuim în T obținând:

$$T = T_1 T_2 \sqrt{\frac{\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2}{\mathcal{I}_1 T_2^2 + \mathcal{I}_2 T_1^2}}$$




## 53.

Un cilindru omogen de masă m execută oscilații de rostogolire pe un plan orizontal, fiind prins la periferie de două resorturi identice orizontale, de constantă k nedeformate în poziția inițială. Care este perioada oscilațiilor cilindrului ?




### REZOLVARE

În timpul oscilațiilor $\theta$ unghiul de deviere al punctului de prindere al resorturilor față de direcția SA în poziția de echilibru.

Elongația liniară $x = 2R\theta$

Ecuația de mișcare față de axa instantanee de rotație S se scrie $\mathcal{I}_{/S}\, \ddot{\theta} = -2F_e\, 2R$ unde $F_e = Kx$ este forța elastică ce apare în unul din resorturi iar $\mathcal{I}_{/S} = \mathcal{I}_{/0} + mR^2$ (teorema

$= 3/2\, mR^2$.

BCU "CAROL I" CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

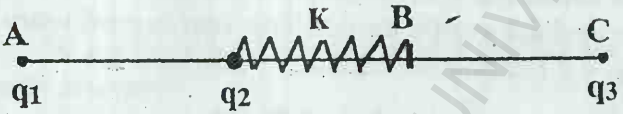
Înlocuind, obținem: $3/2\ m\omega^2 \cdot \ldots = 8\ KR^2\theta$ de unde

$\omega = 4\sqrt{K/3m}$ și perioada $T = \pi/2\sqrt{3m/K}$

## 54.

Se dă sistemul de trei sarcini punctiforme din figură. Sarcinile $q_1$ și $q_3$ sunt fixe iar $q_2$ este atașată resortului cu constantă de elasticitate K fixat în B . Se dau distanțele AB=2/3AC, AC=L, iar lungimea nedeformată a resortului $l_0$ ($l_0$=L/6). Masa corpului de sarcină $q_2$ este m și se poate deplasa fără frecare. Să se găsească poziția de echilibru a lui $q_2$ și apoi să se studieze micile oscilații ale sale în jurul acestei poziții. Se dă $q_1=q_3$ iar $|q_1q_2| = |q_3q_2| = 4\pi\varepsilon_0$ .

l =1m , K = 68 N/m iar m = 10g




REZOLVARE

În poziția de echilibru, fie $\Delta l$ deformarea resortului și $l_1$, $l_2$, distanțele sarcinii $q_2$ față de $q_1$ și $q_3$ :

$l_1 = 2L/3 - l_0 + \Delta l = L/2 + \Delta l$

$l_2 = L/3 + l_0 - \Delta l = L/2 - \Delta l$

Ccondiția de echilibru $F_{el} + F_{c_2} = F_{c_1}$, ne conduce la:

$$K\Delta l + \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0(L/2+\Delta l)^2} = \frac{q_2q_3}{4\pi\varepsilon_0(L/2-\Delta l)^2}$$

ceea ce , în condițiile problemei devine :

$$K\Delta l - \frac{2L\,\Delta l}{(L^2/4-\Delta l^2)^2} = 0$$

Soluțiile ecuației sunt :

BCU "LUCIAN BLAGA" CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$\Delta l_1 = 0$ m

și

$$\Delta l_{2,3} = \pm\sqrt{L^2/4 - \sqrt{2L/K}} = \pm\ 0,28 \text{ m}$$

Rădăcina + 0,28 m nu este acceptabilă ($\Delta l > l_0$), corpul $q_2$ ar trece dincolo de B.

Soluția $\Delta l_1 = 0$ corespunde cazului când $q_1q_2 = q_3q_2 > 0$ iar $\Delta l_2 = -0,28$ m cazului $q_1q_2 = q_3q_2 < 0$

Studiul micilor oscilații în jurul poziției de echilibru se rezumă la ecuația de mișcare ce derivă din aplicarea principiului fundamental al dinamicii

$$(1)\quad m\ddot{x} = -Kx - \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0(L/2 - x)^2} + \frac{q_2 q_3}{4\pi\varepsilon_0(L/2 + x)^2}$$

pentru $q_1q_2 = q_2q_3 > 0$

și x elongația la momentul t, în vecinătatea jumătății distanței AB(x=0). Pentru cealaltă poziție de echilibru (corespunzătoare situației $q_1q_2 = q_2q_3 < 0$ ) ecuația de mișcare ne conduce la :

$$(2)\quad m\ddot{x} = \frac{-1}{(0,22 - x)^2} + \frac{1}{(0,78 + x)^2} - K(-0,28 + x)$$

Ecuația 1 în aproximația $x << L/2 = 0,5$ m ne conduce la :

$$10^{-2}\ddot{x} = -68x - \frac{(L/2 + x)^2 - (L/2 - x)^2}{L^4/16}, \text{ adică}$$

$\ddot{x} = -10^4 x$ unde $\omega_1 = 100$ rad/s

iar soluția ecuației $x = A \sin(100t + \varphi)$

Ecuația (2) devine pentru $x << 0,22$ sau $x << 0,78$:

$$10^{-2}x = \frac{-0,56 - 2x}{0,22^2 0,78^2} + 19 - 68x \quad \text{sau}$$

$\ddot{x} = -2\,68\,10^2 x$, deci oscilația are loc cu pulsația $\omega_2 = 116$rad/s

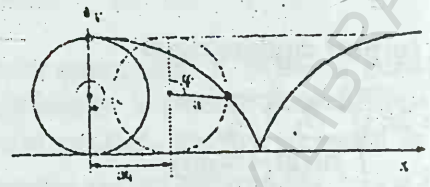


BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

## 55.

**Un punct material alunecă fără frecare pe o cicloidă convexă avînd axa verticală. Arătaţi că oscilaţiile sînt izocrone şi determinaţi perioada.**

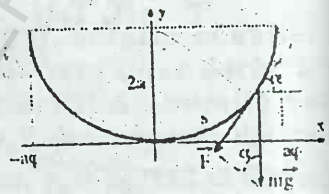
## REZOLVARE



**Cicloida este curba deschisă de un punct aflat pe un cerc care se rostogoleşte. Notînd raza cercului a şi unghiul de rotaţie φ, ecuaţiile parametrice ale cicloidei se vor scrie:**

$$\begin{cases} x = a(\varphi + \sin\varphi) \\ y = a(1 + \cos\varphi) \end{cases}$$

**Particula se va mişca pe cicloidă cu ecuaţiile:**



$$\begin{cases} x = a(\varphi + \sin\varphi) \\ y = a(1 - \cos\varphi) \end{cases}$$

**Alegem coordonata curbilinie s (distanţa parcursă de la origine prevăzută cu + sau cu –).**

**Vom căuta să exprimăm acceleraţia $\ddot{s}$ funcţie de s, utilizînd ecuaţia fundamentală : $m\ddot{s} = -mg\sin\alpha$**

$$s = \int_0^x dx\sqrt{1 + y'^2}$$

$$y' = dy/dx,\ dy = a\sin\varphi\, d\varphi,\ dx = a(1 + \cos\varphi)d\varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \sin\varphi/(1 + \cos\varphi) = tg\varphi/2$$

$$s = \int_0^{\varphi} 2a\cos^2\varphi/2\, d\varphi\sqrt{1 + tg^2\varphi/2} =$$

$$2a\int_0^{\varphi}\cos\varphi/2\, d\varphi = 4a\sin\varphi/2$$

BCU IAŞI CENTRU UNIVERSITY LIBRARY

$\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha / \sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$,

$\operatorname{tg}\alpha = y'$

$\Rightarrow \sin\alpha = (\operatorname{tg}\varphi/2)/\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi/2} = \sin\varphi/2$

**Forța de revenire**

$F = -mg\sin\alpha = -mg\sin\varphi/2 = -mgs/4a$

**este de tip elastic.**

**Se obține ecuația oscilatorului armonic:**

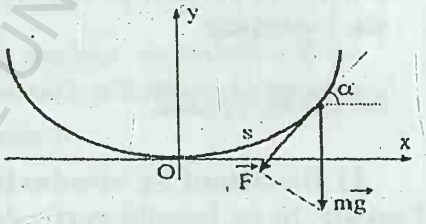
$s + gs/4a = 0$, cu $g/4a = \omega^2$, unde

$T = 4\pi\sqrt{a/g}$

**Oscilațiile sînt izocrone întrucît perioada nu depinde de amplitudine, cu condiția ca $s_{max} < 4a$.**

## 56.

**Determinați perioada micilor oscilații ale unui punct material care alunecă fără frecare pe peretele unei gropi paraboloide cu axa verticală.**




## REZOLVARE

**Mișcarea se va face pe parabola de ecuație**

$y = cx^2$.

**Perioada poate fi calculată în general:**

$$T = 4\int_0^A ds/v,$$

**unde** $ds = \sqrt{dx^2+dy^2} = dx\sqrt{1+y'^2}$, **iar** $v$ **se poate obține**

**energetic** $v = \sqrt{2gc(A^2-x^2)}$,

**unde A este amplitudinea mișcării orizontale.**

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Se obține $T = 4\int_0^A dx\sqrt{(1+4c^2x^2)/2gc(A^2-x^2)}$, de unde se vede că oscilațiile nu sînt în general izocrone, perioada fiind dependentă de amplitudine.

În cazul micilor oscilații ($4c^2x^2 << 1$) se poate scrie

$$T \approx 4\int_0^A dx/\sqrt{2gc(A^2-x^2)}$$

Cu schimbarea de variabilă $x = A\sin\varphi$ se obține:

$$T = (4/\sqrt{2gc})\int_0^{\pi/2} A\cos\varphi d\varphi / \sqrt{A^2(1-\sin^2\varphi)} =$$

$$= (4/\sqrt{2gc})\int_0^{\pi/2} d\varphi = 2\pi/\sqrt{2gc}$$

Se poate arăta că, în aproximația micilor oscilații, mișcarea este armonică.

Alegînd coordonata curbilinie

$s \approx x$,

accelerația corespunzătoare poate fi scrisă:

$s = -g\sin\alpha$.

Pentru amplitudini mici

$\sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha \approx y' = 2cx$,

ceea ce în final conduce la ecuația oscilatorului armonic:

$\ddot{x} + 2cgx = 0$

Obținem și pe această cale expresia perioadei

$$T = 2\pi/\sqrt{2gc}.$$

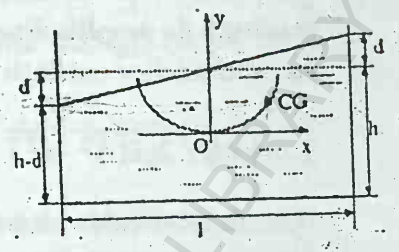
## 57.

Unul din modurile de oscilație ale lichidului conținut într-un vas este caracterizat de menținerea formei plane a suprafeței libere. Fenomenul este observat și la unele lacuri, purtînd denumirea de seișe. Să se determine perioada oscilațiilor care au loc în lungul unei



BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

cuve paralelipipedice, cunoscînd lungimea l și adîncimea h. Se neglijează vîscozitatea.




## REZOLVARE

În cursul oscilațiilor are loc deplasarea centrului de greutate al lichidului în raport cu vasul.

La un moment oarecare, marginea suprafeței libere este deplasată cu d în raport cu poziția de echilibru.

Alegem un sistem de coordonate cu originea în centrul de greutate al lichidului aflat în echilibru.

Coordonatele centrului de greutate pentru situația descrisă în figură se pot calcula utilizînd teorema a doua a lui Guldin: "Volumul corpului generat prin rotația unei suprafețe este egal cu produsul între aria suprafeței respective și lungimea cercului descris de centrul său de greutate."

Cu aceasta putem scrie:

$$2\pi(l/2+x)lh = \pi l^2 (h-d) + \pi l^2 2d/3 ,$$

$$2\pi(h/2+y)lh = \pi l/3 [(h+d)^2 + (h+d)(h-d) + (h-d)^2 ].$$

De aici obținem:

$x = ld/6h$ , $y = d^2/6h$.

prin eliminarea parametrului d ajungem la ecuația traiectoriei pe care o descrie centrul de greutate al lichidului:

$y=(6h/l^2)\, x^2$

Se poate observa că mișcarea lichidului este echivalentă cu oscilațiile descrise de un punct material care se mișcă pe o parabolă. Utilizînd rezultatul problemei precedente, expresia perioadei se scrie:

$$T=\pi l/\sqrt{3gh}.$$

## 58.

**Dispunem de un resort de constantă K şi masă neglijabilă, de care se suspendă un cadru nedeformabil CDEF de masă m , format din n spire de fir conductor. Cadrul se poate deplasa fără frecare într-o mişcare de translaţie verticală.**

**Partea sa inferioară este supusă în permanenţa acţiunii unui cîmp magnetic uniform $\vec{B}$ perpendicular pe planul figurii în zona haşurată . În rest cîmpul este nul peste tot. Cadrul este în circuit deschis.**

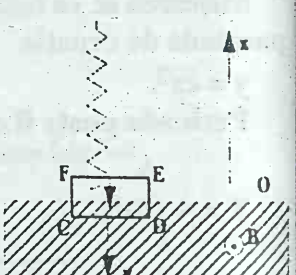
**1) Exprimaţi în funcţie de viteză t.e.m. indusă în cadru în timpul mişcării.**

**2)Extremităţile firului conductor din care este format cadrul fiind legate între ele , oscilaţiile cadrului se amortizează rapid. Justificaţi rezultatul şi studiaţi amortizarea în funcţie de rezistenţa R a cadrului. Calculaţi decrementul său logaritmic.**

**(Bac. Franţa 86)**

### REZOLVARE

**1) Electronii de conducţie sînt puşi în mişcare de forţa Lorentz. Şi pe laturile verticale apare o t.e.m indusă. Curenţii fiind de sensuri contrare, se anulează reciproc .**




**În timpul deplasării bara măturăsuprafaţa l v dt în timpul dt. Cînd v > 0 , suprafaţa scade, deci ds = –lv dt, variaţia fluxului fiind :**

$$d\Phi = +nB\,dS = -n\,l\,B\,v\,dt$$

**iar t.e.m** $e = -\dfrac{d\Phi}{dt} = n\,l\,B\,v = n\,l\,B\,\omega\mathcal{A}\cos(\omega t + \varphi)$

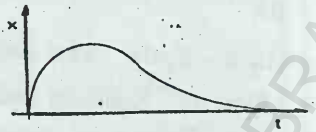
**2) Circuitul fiind închis, apare un curent indus şi în consecinţă o forţă electromagnetică F = Bil . Dacă v > 0 , e şi i sînt pozitivi iar forţa F se opune mişcării.**

$F_{(t)} = -B\frac{e}{R}l = -\frac{nB^2l^2}{R}\omega \mathcal{A}\cos(\omega t + \varphi) = -\frac{nB^2l^2}{R}v_{(t)}$

Cînd cadrul coboară, forța este înddreptată în sus și se opune e asemenea mișcării, ca o forță de frînare fluidă.

Ecuația mișcării cadrului va fi:

$$m\ddot{x} + \frac{nB^2l^2}{R}\dot{x} + Kx = 0 \quad |:m$$




$$\Delta = \left(\frac{nB^2l^2}{2Rm}\right)^2 - \omega_0^2$$

cînd $\Delta > 0 \leftrightarrow \frac{n^2B^2l^2}{2Rm} > \omega_0$ pentru $R < \frac{nB^2l^2}{2m\omega_0}$ mișcarea amortizată aperiodică (v. fig.)

cînd $\Delta = 0 \leftrightarrow R = \frac{n^2B^2l^2}{2m\omega_0}$ amortizare critică.

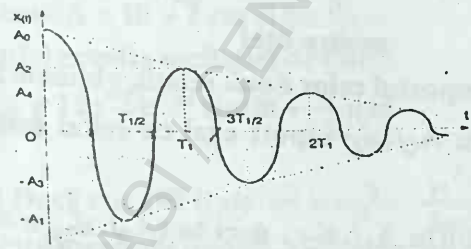
cînd $\Delta < 0 \leftrightarrow R > \frac{nB^2l^2}{2m\omega_0}$ mișcare pseudoperiodică $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{n^2B^4l^4}{4R^2m^2}}$

Decrementul logaritmic: $\frac{nB^2l^2}{2Rm}$

## 59.

**Evaluați spațiul parcurs pînă la oprirea completă a unui corp în mișcare oscilatorie amortizată știind amplitudinea inițială $A_0$ și decrementul logaritmic $\delta$.**

## REZOLVARE




Din graficul elongației în funcție de timp rezultă spațiul pînă la oprire:

$S = A_0 + 2A_1 + 2A_2 + 2A_3 + \ldots + = A_0 + 2A_0\ (e^{-(r/2m)T_1/2} + e^{-(r/2m)T_{1+}} \ldots e^{-(r/2m)3T_1/2} + \ldots) = A_0 + 2A_0\, e^{-(r/2m)T_1/2}\,(1 + \ldots)T_1/2 + \ldots : \ldots m)T_1 + \ldots)$

$\ldots 1$, rezultă rația progresiei geometrice descrescă-

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

toate cu paranteză $e^{-(r/2m)}$ ... $e^{-\delta/2}$

De unde:

$$S = A_0 + 2A_0 e^{-\delta/2} \frac{1}{1-e^{-\delta/2}} = A_0 \frac{1+e^{-\delta/2}}{1-e^{-\delta/2}}$$

## 60.

**Un pendul simplu gravitațional oscilează amortizat, decrementul logaritmic fiind δ. Știind că după un timp τ energia mecanică a pendulului a scăzut de e ori, să se afle lungimea pendulului.**

## REZOLVARE

**Ecuația mișcării pendulului matematic amortizat este de forma:**

$$x_{(t)} = A_0 e^{-(r/2m)t} \sin(\omega_1 t + \varphi)$$

**unde r este coeficientul de frecare,** $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - r^2/4m^2}$

**pseudopulsația, iar** $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$ **pulsația proprie a pendulului neamortizat.**

**Decrementul logaritmic** $\delta = \ln \frac{An}{A_{n-1}} = \frac{r}{2m} T_1 = \frac{\pi r}{m\sqrt{(g/l) - r^2/4m^2}}$

**unde** $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$ **este pseudoperioada.**

**Energia mecanică a oscilatorului amortizat, la momentul t are expresia:**

$$E_{(t)} = 1/2\ m\omega_1^2 A^2_{(t)} = 1/2\ m\omega_1^2 A^2_0 e^{-(r/m)t}$$

**Din condiția problemei, la momentul τ avem:**

$E_{(\tau)} = \frac{Eo}{e}$, **de unde rezultă** $r = \frac{m}{\tau}$. **Mai departe**

$$\delta = \frac{\pi/\tau}{\sqrt{g/l - 1/4\tau^2}} \text{ și de aici } l = \frac{4g\tau^2}{1 + \frac{4\pi^2}{\delta^2}}$$



BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

**61.**

**De cîte ori se micşorează după o perioadă viteza unui corp ce execută oscilaţii amortizate cu decrementul logaritmic δ ?**

## REZOLVARE

Din $x_{(t)} = A_0\, e^{-(r/2m)t} \sin(\omega_1 t + \varphi)$ cu $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - r^2/4m^2}$ rezultă, prin derivare în raport cu t :

$$v_{(t)} = dx_{(t)}/dt = A_0\, e^{-(r/2m)t} \left[ \omega_1 \cos(\omega_1 t + \varphi) - \frac{r}{2m} \sin(\omega_1 t + \varphi) \right]$$

Cum decrementul logaritmic poate fi scris:

$$\delta = \frac{\pi r}{m\omega_1} \text{ rezultă } \frac{r}{m} = \frac{\delta \omega_1}{\pi}$$

Raportul cerut : $v_{(t)} / v_{(t+T_1)}$ unde $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$ devine :

$e^{(r/2m)T_1} = e^{(\delta\omega_1/2\pi)T_1} = e^{\delta}$ ,

deci viteza are acelaşi decrement logaritmic ca şi elongaţia.

**62.**

**Cum depinde amplitudinea de oscilaţie a unui pendul de timp, presupunînd că frecarea este datorată vitezei relative dintre corp şi aer şi energia scade în unitate de timp proporţional cu pătratul vitezei corpului .**

**A.N. Amplitudinea unui pendul format dintr-o sferă de aluminiu scade după 5 minute la jumătate din amplitudinea iniţială .**

**Cu cît scade amplitudinea unui pendul compus dintr-o sferă de volum identic, dar din oţel, atîrnată de un fir de aceeaşi lungime?**

## REZOLVARE

**Ecuaţia de mişcare a pendulului cu amortizare :**



BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{mgx}{l} - F_f$$

Din $\frac{dE}{dt} = -Cv^2$ rezultă $dE = -Cv^2dt$, iar pe de altă parte

$dE = dL_f = -F_f\,dx$ sau amplificînd prin dt:

$dE = -F_f\,v\,dt$. Egalînd cele două expresii ale variației energiei, obținem pentru forța de frecare expresia:

$Ff = -Cv$

Ecuația de mișcare devine:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{C}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{g}{l}x = 0$$

Pentru $\frac{g}{l} = \omega_0^2 \geq \frac{C^2}{4m^2}$, deci $C \leq 2m\omega_0$, soluția ecuației pendulului este oscilatorie amortizată:

$x_{(t)} = A_0\,e^{-(C/2m)\,t}\sin(\omega_1 t + \varphi)$

unde $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \frac{C^2}{4m^2}$ reprezintă pătratul pseudopulsației, iar amplitudinea $\mathcal{A}_{(t)} = A_0\,e^{-(C/2m)\,t}$ este funcție descrescătoare de timp.

În aplicația numerică, masele fiind diferite vom avea:

$\mathcal{A}_1 = \frac{A_0}{2} = A_0\,e^{-(C/2m_1)\,t}$ pentru Al

și

$\mathcal{A}_2 = A_0\,e^{-(C/2m_2)\,t}$ pentru oțel

Logaritmînd și făcînd raportul celor două relații, obținem:

$m_2/m_1 = (\ln A_0/\mathcal{A}_1)/(\ln A_0/\mathcal{A}_2)$ raport egal cu cel al densităților

De aici: $\rho_2/\rho_1 = (\ln 2)/(\ln A_0/\mathcal{A}_2)$, deci $\ln(A_0/\mathcal{A}_2) = 0{,}24$, iar $\mathcal{A}_2 = 0{,}81\,A_0$. Amplitudinea pendulului de oțel a scăzut cu 19%, deci mai puțin decît a celui de aluminiu.

BCU CLUJ CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

03.

Un corp cu greutatea G = 49N execută oscilații amortizate într-un mediu unde întîmpină o forță de rezistență proporțională cu viteza sa. Cunoscînd pseudoperioada $T = \frac{\pi}{4}$ s , decrementul logaritmic $\delta = \frac{3\pi}{2}$ și știind că la $t_0 = 0$ are $x_0 = 10$ cm și $v_0 = 20$ cm/s , să se determine legea sa de mișcare, precum și factorul de amortizare din expresia forței de rezistență. Să se stabilească apoi legea de mișcare dacă acesta crește de 3 ori .

## REZOLVARE

a) $x_{(t)} = A\, e^{-(r/2m)t} \sin(\omega t + \varphi)$ descrie mișcarea oscilatorie amortizată, unde r este factorul de frecare.

Pulsația este $\omega = \frac{2\pi}{T} = 8$ rad/s . Decrementul logaritmic ne permite determinarea lui r :

$$\delta = \ln \frac{A_n}{A_{n-1}} = \frac{r}{2m} T \text{ , deci } r = 2m \frac{\delta}{T} = 60 \text{ kg/s}$$

Din condițiile inițiale determinăm A și $\varphi$ prin sistemul :

$$\begin{cases} A \sin \varphi = 10 \\ A(4 \cos \varphi - 3 \sin \varphi) = 10 \end{cases}$$

Găsim $A = 10\sqrt{2}$ cm și $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Astfel ecuația oscilației devine

$$x_{(t)} = 10\sqrt{2}\, e^{-6t} \sin(8t + \frac{\pi}{4}) \text{cm}$$

b) Dacă r' = 180 Kg/s $\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{r'^2}{4m^2} < 0$ , deci mișcarea nu mai este pseudoperiodică, ci devine aperiodică.

Ecuația ei de mișcare e aceeași :

$$\ddot{x} + \frac{\cdot}{m} \qquad x = 0$$

BUCUREȘTI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

dar cum $\Delta = \frac{r'^2}{4m^2} - \omega_0^2 > 0$ rădăcinile ecuației caracteristice vor fi reale $-\frac{r'}{2m} \pm \sqrt{\Delta}$, deci soluția ei :

$x_{(t)} = e^{-(r'/2m)t} (C_1 e^{\sqrt{(r'^2/4m^2 - \omega_0^2)}\, t} + C_2 e^{-\sqrt{(r'^2/4m^2 - \omega_0^2)}\, t})$

În cazul nostru, ea devine :

$x_{(t)} = e^{-18t} (C_1 e^{\sqrt{260}\, t} + C_2 e^{-\sqrt{260}\, t})$

unde $C_1$ și $C_2$ se pot determina din condițiile inițiale .

## 64.

Determinați legea de variație în timp a energiei unui oscilator liber amortizat . Identificați constanta $\tau$ din ecuația:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{E_{acumulată}} \left| \frac{dE}{dt} \right|,$$

precizîndu-i și semnificația.

REZOLVARE

$E_{acumulată} = KA^2_{(t)}/2 = (KA^2_{(t)}/2)\, e^{-(C/m)t}$

$E_{pierdută(t)} = KA^2_0/2 - KA^2_{(t)}/2 = KA^2_0/2 - KA^2_0/2\, e^{-(C/m)t}$

$dEp/dt = (KA^2_0/2)(C/m)e^{-(C/m)t} = E_{acumulată}\, (C/m)$

Rezultă

$$\frac{1}{\tau} = \frac{C}{m} = \gamma$$

deci $\tau$ este inversul exponentului adică constanta de timp a oscilatorului liber amortizat. $\tau$ este intervalul de timp în care energia oscilatorului se reduce în urma amortizării de e ori .

## 65.

Un pendul elastic se mișcă pe o suprafață orizontală , cu frecare. Inițial, resortul este alungit cu $x_0$ și apoi lăsat liber.

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Să se determine numărul de oscilații, distanța și timpul până la oprire.

Se cunosc masa m, constanta de elasticitate k și coeficientul de frecare de alunecare $\mu$, respectiv statică $\mu_s$.

## REZOLVARE

Fie $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ deformările extreme ale resortului.

Din teorema energiei cinetice

$O = k/2\,(x_{n-1}^2 - x_n^2) - \mu\, mg(x_1+x_2)$,

obținem relația de recurență : $k/2(x_{n-1} - x_n) = \mu\, mg$, iar apoi:

$$x_n = x_0 - n\,\frac{2\mu mg}{k}$$

Oscilațiile încetează dacă $kx_n < \mu_s\, mg$, adică :

$kx_0 - 2\mu mg\, n < \mu_s\, mg$.

Rezultă $n > (kx_0 - \mu_s\, mg)/2\mu\, mg$, de unde

$n = [(kx_0 - \mu_s mg)/2\mu\, mg] + 1$

Numărul de oscilații va fi $N = [\, n/2]$

Distanța parcursă poate fi determinată :

$$S = \sum_{i=1}^{n}(x_{i-1} - x_i) = \sum_{i=1}^{n}(2x_0 - (2i-1)\frac{2\mu mg}{k})$$

$$S = 2n(x_0 - \frac{\mu mgn}{k})$$

Sau energetic :

$$O = \frac{k}{2}(x_0^2 - x_n^2) - \mu\, mg\, S$$

Forța de frecare, constantă, nu modifică perioada oscilațiilor, deplasează doar poziția de echilibru a oscilatorului.

Durata mișcări este $t = n\,\frac{T}{2}$:

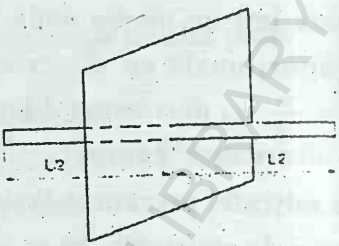
$$t = n\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$



BCU Cluj / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

## 66.

Intr-o placă plană, subțire, omogenă, de densitate superficială de masă σ și suficient de mare pentru a neglija efectele de margine, aflată în imponderabilitate și în permanență în repaus se practică un orificiu prin care poate aluneca fără frecare o tijă omogenă de lungime L și masă m, ca în figură. Inițial tija este poziționată simetric și în repaus în raport cu planul. Tija este deplasată în lungul ei pe o distanță $\Delta << L$ și apoi eliberată. Să se determine dependența vitezei tijei de poziția în raport cu placa.



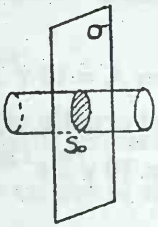

*(T. N. F. "2 Mai" 1993, prof. D. Rădoiu)*

### REZOLVARE

Pentru aflarea intensității cîmpului gravitațional creat de placă se aplică teorema lui Gauss printr-o suprafață închisă în jurul plăcii, fie ea de arie So :

$\Gamma 2So = 4\pi KSo\,\sigma$ , de unde $\Gamma = 2\pi K\sigma$

Astfel că forța de revenire, de tip elastic ce va acționa asupra barei deplasată cu x față de poziția de echilibru va fi :




$F = -2x\lambda\Gamma$ de unde "constanta de elasticitate" $K^* = 2\lambda\Gamma$ , iar $\omega = \sqrt{K^*/m} =$

$= 2\sqrt{K\pi\sigma/L}$ , unde am ținut cont că $\lambda = m/L$

Mișcarea descrisă de tijă în cîmpul elastic va fi oscilatorie armonică de pulsație ω și amplitudine Δ, astfel încît :

$$\begin{cases} x = \Delta \sin(\omega t + \varphi) \\ v = \Delta\,\omega \cos(\omega t + \varphi) \end{cases}$$ De aici, relația cerută :

$$v = \pm 2\sqrt{K\pi\sigma/L}\ (\Delta^2 - x^2)^{1/2}$$

BCU IASI - CENTRUL UNIVERSITAR LIBRARY

Un magnet de moment magnetic M este suspendat de un punct fix prin intermediul unui fir de torsiune de constantă C; direcția firului trece prin centrul de greutate al magnetului. Acest magnet se găsește într-un cîmp magnetic omogen, orizontal, de intensitate $\vec{H}$. Cînd firul nu este răsucit axa SN a magnetului este paralelă cu H. Se rotește progresiv partea superioară a firului de un unghi $\alpha$; axa SN se rotește de un unghi $\beta$.

Găsiți relația între $\alpha$ și $\beta$. Trasați curba $\alpha = f_{(\beta)}$. Arătați că dacă $C < \vec{M}\vec{H}$, echilibrul este stabil cînd $\alpha$ este inferior unei anumite valori $\alpha_1$. Calculați $\alpha_1$ și valoarea corespunzătoare $\beta_1$ a unghiului $\beta$. Găsiți perioada oscilațiilor în jurul poziției de echilibru.

## REZOLVARE

Momentul rezultant este $\mathcal{M} = -MH \sin\beta + C(\alpha - \beta)$.

Echilibrul se realizează pentru $\mathcal{M} = 0$, adică

$\alpha = \beta + (MH/C) \sin\beta$.

Stabilitatea echilibrului este legată de semnul cantității:

$d\mathcal{M}/d\beta = -MH\cos\beta - C = -(1/C)[-(MH/C)\cos\beta - 1] =$

$= -(1/C)(d\alpha/d\beta)$

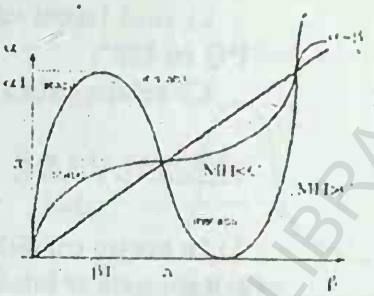
deci de semnul pantei tangentei la curba $\alpha = f(\beta)$.

Cînd această pantă este pozitivă, echilibrul este stabil. Ori, această pantă este pozitivă $[1 + (MH/C)\cos\beta]$ oricare ar fi $\beta$ dacă $MH < C$.

Dacă $MH > C$ această pantă nu este pozitivă decît dacă $\beta < \beta_1$ unde $\beta_1$ este dat de $1 + MH/C \cos\beta_1 = 0$, adică $\cos\beta_1 = -C/MH$.

Prin urmare $\alpha_1 = \beta_1 + MH/C \sin\beta_1$. Dacă $\beta$ depășește valoarea $\beta_1$ [illegible] ruptură de echilibru, dar pot exista pentru $\beta > \beta_1$ [illegible] alte poziții de echilibru stabil sau instabil după

cum vor indica intersecțiile unei drepte de ordonată $\alpha > \alpha_1$ cu curba $\alpha = f(\beta)$.



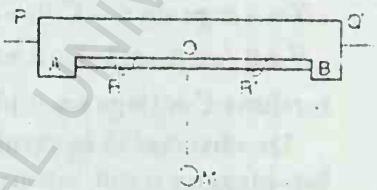
Perioada oscilațiilor în jurul poziției de echilibru stabil va fi:

$$T = 2\pi\sqrt{I/(-d\mathcal{M}/d\beta)} =$$

$$= 2\pi\sqrt{I/(MH\cos\beta + C)}$$ unde I este momentul de inerție al magnetului.

## 68.

Un pendul este alcătuit dintr-o sferă de plumb cîntărind 500 g, al cărei centru se găsește la 50 cm de axa de oscilație AB plasată orizontal.



1) Se înclină suportul AOB făcîndu-l să se rotească în jurul axului O perpendicular pe planul ABM. Cum variază perioada de oscilație?

2) Revenind la poziția inițială se leagă pendulul de suport prin 2 resorturi R și R' care creează eforturi proporționale cu unghiurile de depărtare de la planul vertical. Se rotește suportul cu un unghi drept în jurul axului PQ paralel cu AB și se constată că sub acțiunea resorturilor, tija pendulului se înclină cu 60° în raport cu verticala. Se cere valoarea cuplului de torsiune a resorturilor.

Care vor fi perioadele micilor oscilații ale pendulului în următoarele cazuri:

a) cînd se înclină și mai mult suportul astfel ca poziția de echilibru a pendulului să fie orizontală;

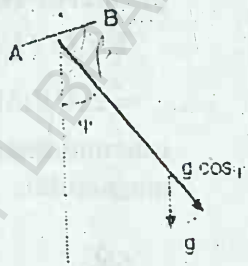
b) cînd se revine la poziția inițială cînd planul ABM este vertical;

BCU CLUJ / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

c) cînd facem ca suportul să se rotească în jurul axului PQ cu 180°;

Ce relație există între aceste 3 perioade de oscilație ?

## REZOLVARE




1) In aceste condiții , accelerația gravitațională se înlocuiește cu proiecția ei pe planul de oscilație g cosφ și perioada devine

$$T_\varphi = 2\pi\sqrt{[ma^2 + (2/5)mr^2]/(mga\cos\varphi)}$$

Pentru $\varphi = \pi/2$ , $T \to \infty$

2) Fie $\beta$ unghiul de rotație al suportului și $\alpha$ unghiul de rotație a pendulului măsurate de la verticală. Momentul rezultant . $M = -mga \sin\alpha + C(\beta - \alpha)$. Echilibrul se obține pentru . $M = 0$ , cu $\beta = \pi/2$ și $\alpha = \pi/3$ . De unde rezultă constanta de torsiune $C = (mga \sin\alpha)/(\beta - \alpha) = 81$ Nm/rad

De observat că în cazul particular al enunțului , echilibrul este întotdeauna stabil, întrucît condiția d. $M/d\alpha = -mga\cos\alpha - C < 0$ implică $\cos\alpha > -C/mga$ îndeplinită întotdeauna.

Perioada în cazul general (pentru $\alpha$ oarecare)

$$T = 2\pi\sqrt{[ma^2 + (2/5)mr^2]/(C + mga\cos\alpha)}$$

ia valorile :

$T_{a)} = 2\pi\sqrt{[ma^2 + (2/5)mr^2]/C} \cong 1.1s$ pentru $\alpha = \pi/2$

$T_{b)} = 2\pi\sqrt{[ma^2 + (2/5)mr^2]/(C+mga)} \cong 0,87s$ pentru $\alpha = 0$

$T_{c)} = 2\pi\sqrt{[ma^2 + (2/5)mr^2]/(C-mga)} \cong 1,75s$ pentru $\alpha = \pi$

Se verifică cu ușurință că

$$2/T_{a)}^2 = 1/T_{b)}^2 + 1/T_{c)}^2$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

69.

Verificați, în cazul unei amortizări slabe și pentru $\omega$ aproape de $\omega_1$ (pulsația oscilatorului liber amortizat) că energia înmagazinată are expresia:

$$E_{(t)} = E\,[1+e^{-(C/m)\,t} - 2\,e^{-(C/2m)\,t}\,\cos(\omega-\omega_1)t]$$

unde E este energia în regim staționar.

Reprezentare grafică.

## REZOLVARE

Fie ecuația de mișcare a oscilatorul întreținut:

$m(d^2x/dt^2) + C(dx/dt) + Kx = F_0 \sin \omega t$

cu soluția, în regim tranzitoriu:

$x_{(t)} = A_0\, e^{-(C/2m)t} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A \sin(\omega t + \varphi)$

Impunîndu-i la $t_0=0$, $x_0=o$ ea devine:

$x_{(t)} = A_0\, e^{-(C/2m)t} \sin\omega_1 t - A_0 \sin\omega t \quad (A_0 \sin\varphi_1 + A\sin\varphi = 0)$

iar viteza: $v_{(t)} = -A_0\omega_1 e^{-(C/2m)t} \cos\omega_1 t + A_0\omega\cos\omega t$

unde am neglijat variația lui $e^{-(C/2m)t}$ ca nesemnificativă.

Energia E în regim staționar $= KA^2/2 = m\omega^2 A_0^2/2$

Energia în regim tranzitoriu:

$E_{(t)} = Ep_{(t)} + Ec_{(t)} = Kx_{(t)}^2/2 + mv_{(t)}^2/2 =$

$= (KA_0^2/2)e^{-(C/m)t} \sin^2\omega_1 t + (KA^2/2)\sin^2\omega t -$

$- 2(AA_0/2)K\, e^{-(C/2m)t} \sin\omega_1 t \sin\omega t +$

$+ (m/2)A_0^2 e^{-(C/m)t}\, \omega_1^2 \cos^2\omega_1 t + (m/2)A^2\omega^2\cos^2\omega t -$

$- (2AA_0/2)\, m\omega\omega_1\, e^{-(C/2m)t} \cos\omega_1 t \cos\omega t \cong$

$\cong (m\omega^2 A^2/2)(\sin^2\omega t + \cos^2\omega t) +$

$+ (m\omega^2/2)e^{-(C/2m)t}(\sin^2\omega_1 t + \cos^2\omega_1 t) -$

$- AA_0 m\omega_1^2 e^{-(C/2m)t}\, (\sin\omega_1 t \sin\omega t + \cos\omega_1 t \cos\omega t) =$

$= E + Ee^{-(C/m)t} - 2E\cos(\omega_1-\omega)t\, e^{-(C/2m)t} = E[\,1 + e^{-(C/m)t} -$

$-2e^{-(C/2m)t}\cos(\omega_1-\omega)t]$

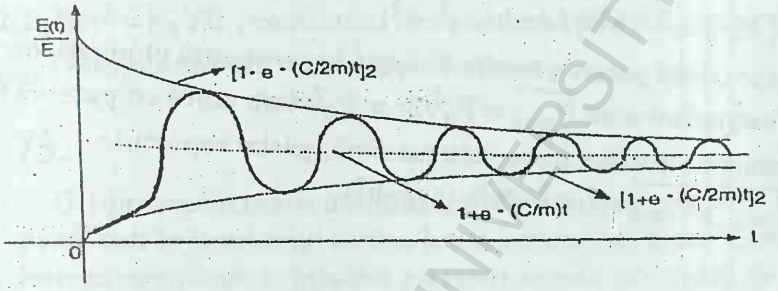
Am aproximat ($A_0=-A$) $AA_0 \cong A_0^2$, $\omega\omega_1 \cong \omega^2 \cong \omega_1^2 \cong K/m$

Reprezentarea grafică:

pentru $\cos(\omega-\omega_1)t=max=1$, înfășurătoarea superioară va fi curba: $1+e^{-(C/m)t}-2e^{-(C/2m)t}=(1-e^{-(C/2m)t})^2$

pentru $\cos(\omega-\omega_1)t=min=-1$, înfășurarea inferioară va fi curba $1+e^{-(C/m)t}+2e^{-(C/2m)t}=(1+e^{-(C/2m)t})^2$

"Axa" curbei : $\cos(\omega-\omega_1)t=0$ corespunde curbei $1+e^{-(C/m)t}$




## 70.

Știind că amplitudinea oscilațiilor forțate este aceeași pentru două frecvențe $\omega_1$ și $\omega_2$, să se afle frecvența de rezonanță.

## REZOLVARE

Din expresia amplitudinii oscilațiilor întreținute în funcție de frecvența forței de întreținere :

$$A_{(\omega)}=(Fo/m)/\sqrt{(r^2/m^2)\omega^2+(\omega_0^2-\omega^2)^2}$$

rezultă maximul (rezonanța) ei pentru frecvența de rezonanță $\omega_{rez}=\sqrt{\omega_0^2-2r^2/4m^2}$.

Pentru ca să fie îndeplinită condiția $A(\omega_1)=A(\omega_2)$ trebuie ca ele două frecvențe să fie situate simetric de o parte și de alta a frecvenței de rezonanță. Fie, deci, $\omega_1 < \omega_{rez} < \omega_2$ (vezi curba de

BUCHAREST POLYTECHNIC UNIVERSITY LIBRARY

rezonanță). Atunci : $\omega_1 < \omega_0 < \omega_2$

și deci :

$(\omega_0^2-\omega_1^2)^2+ (r^2/m^2)\omega_1^2 =$

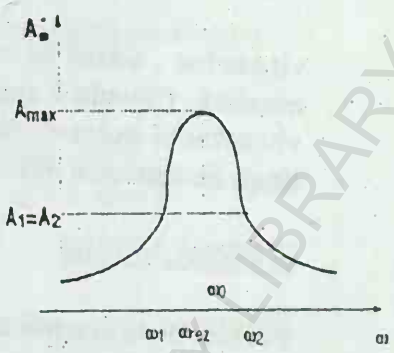
$=(\omega_2^2-\omega_0^2)^2+ (r^2/m^2)\omega_2^2$ de

unde rezultă

$\omega_0^2 = 1/2\ (\omega_1^2+\omega_2^2) + r^2/2m^2$

Înlocuind în $\omega_{rez}$ obținem în final

$\omega_{rez} = \sqrt{1/2\ (\omega_1^2 +\omega_2^2)}$




## 71.

Exprimați pulsația de rezonanță și amplitudinea maximă corespunzătoare în funcție de decrementul logaritmic δ, pulsația proprie $\omega_0$ și amplitudinea forței perturbatoare $F_0$.

### REZOLVARE

Cum $\omega_{rez} = \sqrt{\omega_0^2-2\ r^2/2m^2} = \sqrt{\omega_0^2-r^2/m^2}$

iar $A_{max} = F_0/r\sqrt{\omega_0^2-r^2/4m^2}$

înlocuind $r/m = \delta\omega_1/\pi = \delta/\pi\sqrt{\omega_0^2-r^2/4m^2}$ ,

deci $r/m = 2\omega_0\delta/\sqrt{4\pi^2 +\delta^2}$

obținem :

$\omega_{rez} = \omega_0\sqrt{(1-3\delta^2 /4\pi^2) / (1+\delta^2 /4\pi^2)}$

și respectiv :

$A_{max} = [\ F_0(4\pi^2 + \delta^2) /4\pi m\delta\omega_0^2]$ .

## 72.

Pentru un oscilator întreținut de o forță sinusoidală cu amplitudinea $F_0$ , având pulsația oscilațiilor proprii neamortizate $\omega_0$ , găsiți pulsația pentru care se instalează rezonanța

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

vitezelor , adică la care amplitudinea vitezei devine maximă. Calculați amplitudinea oscilațiilor la rezonanța vitezelor și puterea disipată în aceste condiții mediată în timp. Se cunoaște decrementul logaritmic δ.

## REZOLVARE

Pornim de la ecuația mișcării întreținute :

$\ddot{x} + (r/m)\dot{x} + \omega_0^2 x = (F_0/m) \sin \omega t$

pe care o mai derivăm o dată în raport cu t :

$\ddot{v} + (r/m)\dot{v} + \omega_0^2 v = (F_0/m)\, \omega \cos \omega t$

căreia , în regim staționar îi propunem o soluție de forma :

$v_{(t)} = V_m \cos (\omega t + \varphi)$

Determinăm amplitudinea $V_m$ din diagrama Fresnel :

$V_m(\omega) = F_0\omega/m \sqrt{r^2\omega^2/m^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}$

al cărei maxim (rezonanța vitezelor) este atins pentru

$dV_m/d\omega = 0$ , adică $\omega_{rez} = \omega_0$

Amplitudinea vitezei devine

$V_{m\,max} = F_0/r = (F_0\sqrt{4\pi^2 + \delta^2})/2\omega_0 m\delta$

Amplitudinea oscilațiilor va fi în acest moment :

$A_{(\omega_0)} = F_0/r\omega_0 = (F_0\sqrt{4\pi^2 + \delta^2})/2\omega_0^2 m\delta$

Puterea disipată la viteza $v_{(t)}$ va fi :

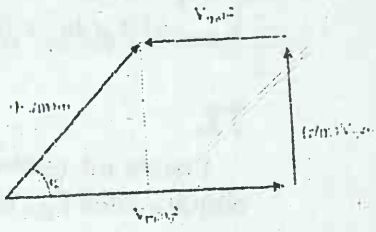
$P = F_f v = -rv_{(t)}^2 = -rV_m^2 \cos^2 (\omega t + \varphi)$

La rezonanța vitezelor $\varphi = -\pi/2$

, deci puterea medie disipată devine egală cu puterea forței active $F_0$ sinωt :

$\overline{P_{rez}} = P_{max} = rV_{mmax}^2/2 =$

$= F_0^2/2r = (F_0^2\sqrt{4\pi^2 + \delta^2})/4\omega_0 m\delta$





BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Să se determine raportul dintre puterea medie la rezonanța elongațiilor și puterea medie la rezonanța vitezelor.

## REZOLVARE

$$\overline{P_{(\omega\,rez)}} = rV^2_{m(\omega_{rez})}/2 =$$

$$= r/2[F_0\omega_{rez}/m\sqrt{4b^2\omega^2_{rez}+(\omega^2_{rez}-\omega^2_0)^2}]^2$$

$$= [F_0^2(\omega_0^2-2b^2)]/4mb(\omega_0^2-b^2)$$

reprezintă puterea medie disipată la rezonanța elongațiilor. Comparînd-o cu $\overline{P_{max}} = F_0^2/2r = F_0^2/4mb$ adică cu puterea la rezonanța vitezelor (care este maximă) găsim raportul:

$$\overline{P_{(\omega_{rez})}}/\overline{P_{max}} = (\omega_0^2-2b^2)/(\omega_0^2-b^2)$$

## 74.

Pentru două frecvențe $\omega_1$ și $\omega_2$ ale forței sinusoidale de întreținere, amplitudinea vitezei se reduce la jumătate din valoarea maximă. Să se exprime frecvența de rezonanță a vitezelor și coeficientul de amortizare ($r/2m \equiv b$). De cîte ori se reduce puterea medie?

## REZOLVARE

Cum $V_{m\,max} = F_0/r$ (la rezonanță), pentru $\omega_{1,2}$ vom avea:

$V_{m\,1,2} = F_0/2r = F_0\omega_{1,2}/m\sqrt{4b^2\omega_{1,2}^2+(\omega_{1,2}^2-\omega_0^2)}$ de unde

$(4b\omega_{1,2})^2 = 4b^2\omega_{1,2}^2 + (\omega_{1,2}^2-\omega_0^2)^2$ și pentru că $\omega_1 < \omega_{rez} < \omega_2$ ecuațiile corespunzătoare celor două frecvențe:

$\omega_2^2 - 2\sqrt{3}b\omega_2 - \omega_0^2 = 0$ și respectiv



BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$\omega_1^2 + 2\sqrt{3}b\omega_1 - \omega_0^2 = 0$

Inmulțind-o pe prima cu $\omega_1$ și pe a doua cu $\omega_2$, deducem:

$\omega_0^2 = \omega_1\omega_2$, deci $\omega_0 = \sqrt{\omega_1\omega_2}$

Adunînd apoi ecuațiile și înlocuindu-l pe $\omega_0$ cu expresia găsită, obținem pentru coeficientul de amortizare:

$b = (\omega_2 - \omega_1)/2\sqrt{3}$

Cum puterea medie corespunzătoare celor două pulsații este:

$P_{1,2(t)} = rv^2_{1,2(t)} = rV_{m1,2}^2 <\cos^2(\omega_{1,2}t + \varphi_{1,2})>_t = rV_{m1,2}/2 = r/2(F_0/2r)^2 = F_0^2/8r$, constatăm că ea reprezintă 1/4 din puterea $P_{max}$ corespunzătoare rezonanței vitezelor.

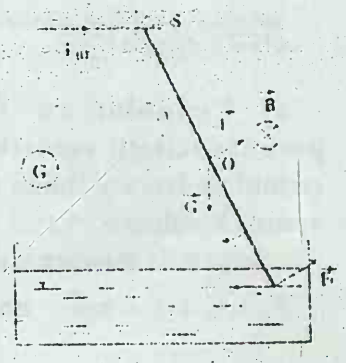
## 75.

O tijă conductoare mobilă de lungime l, de masă m se poate roti în jurul unui ax fix. Extremitatea sa liberă se află într-un recipient conținînd mercur; acesta are rolul de a asigura contactul electric. Conductorul este supus influenței unui cîmp magnetic perpendicular pe planul figurii. Prin tijă este trecut curentul $i_{(t)} = \mathcal{I}_0\sqrt{2}\sin\omega t$ de frecvență reglabilă.

Frecarea vîrfului tijei cu mercurul poate fi asimilată unei forțe proporționale cu viteza.

1) Găsiți frecvența curentului pentru care amplitudinea oscilațiilor devine maximă.

2) Exprimați viteza și accelerația pendulului în cursul oscilațiilor în prezența cîmpului magnetic.




REZOLVARE

1) Oscilațiile tijei sub acțiunea [illegible] frecvență și a forței [illegible] magnetice sînt descrise de [illegible] care:

$J_S\ddot{\theta} = -G(\ldots) - F_t l \cos\theta + F(l/2)\ldots\theta$

În aproximația micilor oscilații ( $\sin\theta \approx 0$, $\cos\theta \approx 1$ ) ea devine:

$(m/3)\ddot{x} = -(mg/2l)x - C\dot{x} + (1/2)Bi_{(t)}\,l$

unde $x = \theta l$ este elongația liniară.

Forma finală a ecuației oscilațiilor întreținute va fi:

(1) $\ddot{x} + (3C/m)\dot{x} + (3g/2l)x = (3Bl/2m)\,\nu_0\sqrt{2}\,\sin\omega t$

Propunînd, în regim permanent, soluția:

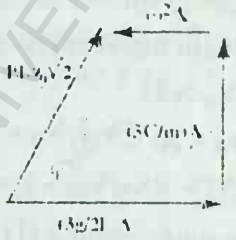
(2) $x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$

cu pulsația $\omega$ impusă de forța electromagnetică și construind diagrama fazorială corespunzătoare ecuației (1), găsim expresia amplitudinii A în funcție de $\omega$:

$A(\omega) = [\,(3/2)\,Bl\nu_0\sqrt{2}\,] / \sqrt{9C^2\omega^2 + m^2\,(3g/2l - \omega^2)^2}$

Frecvența pentru care se obține rezonanța este cea pentru care derivata funcției $A(\omega)$ se anulează, adică:

$\omega_{rez} = \sqrt{(3g/2l) - (9/2)(C^2/m^2)}$




bineînțeles, cu condiția impusă coeficientului de frecare

$C < m\sqrt{g/3l}$

2) Expresia vitezei ca funcție de timp:

$v_{(t)} = V_m \cos(\omega t + \varphi)$

unde $V_m = (3Bl\nu_0\omega\sqrt{2}) / 2\sqrt{9C^2\omega^2 + m^2\,[\,(3g/2l) - \omega^2)^2}$

iar $\varphi = \arctg\, 3C\omega / m\,[(3g/2l) - \omega^2]$

Expresia accelerației:

$a_{(t)} = -a_m \sin(\omega t + \varphi)$

unde:

$a_m = (3Bl\nu_0\omega^2\sqrt{2}) / 2\sqrt{9C^2\omega^2 + m^2\,[\,(3g/2l) - \omega^2)^2}$

## 76.

Fie un gaz în interiorul unui cilindru de secțiune S prevăzut cu un piston de masă m care se poate deplasa fără frecare. Inițial presiunea gazului era egală cu cea exterioară



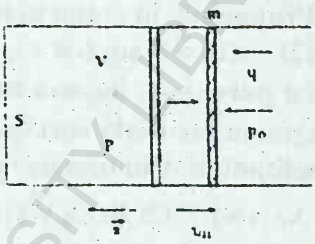
BIBLIOTECA CENTRALĂ UNIVERSITARĂ LIBRARY

$p_0$ și volumul său era $V_0$. La un moment dat acționează asupra pistonului o presiune exterioară de forma $q = q_0 \sin \omega t$

Variația stării gazului se face adiabatic după legea

$pV^\gamma = \text{constant}$ unde $\gamma = C_p/C_v$

Să se studieze oscilațiile pistonului.




## REZOLVARE

Legea de mișcare pentru piston este :

$$-m\,(d^2x/dt^2) = (p - p_0)S - q_0 S \sin \omega t \quad (1)$$

unde presiunea

$p = p_0(V_0/V)^\gamma$

Evaluăm diferența $p - p_0$ în cazul micilor oscilații

$(Sx/V_0 << 1)$

$$p - p_0 = p_0\{[V_0/(V_0 + Sx)]^\gamma - 1\} = p_0\{[1 + Sx/V_0)]^{-\gamma} - 1\} \approx$$

$$\approx p_0[1 - \gamma(Sx/V_0) - 1] = -p_0 Sx\,\gamma/V_0$$

Cu aceasta ecuația (1) devine :

$$m\,(d^2x/dt^2) + \gamma\,(S^2 p_0/V_0)x = q_0 S \sin \omega t \quad (1)$$

Notăm cu $\omega_0^2 = \gamma S^2 p_0/mV_0$ pulsația corespunzătoare ecuației omogene. Soluția ecuației omogene e de forma

$$x_0(t) = X_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (2)$$

O soluție particulară a ecuației neomogene

$$x_{(t)} = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (3)$$

a cărei amplitudine și fază le putem determina prin identificarea coeficienților în ecuația (1). Rezultă :

$\varphi = 0$ și $A_{(\omega)} = q_0 S/m(\omega_0^2 - \omega^2)$

Astfel, soluția generală va fi suprapunerea soluțiilor (2) și (3) :

$$x_{(t)} = X_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0) + [q_0 S/m(\omega_0^2 - \omega^2)]\sin \omega t$$

Din condițiile inițiale $t_0 = 0$, $x_0 = 0$, $V_0 = 0$ rezultă $\varphi_0 = \pi$ și

$$X_m = q_0 S\omega/\omega_0(\omega_0^2 - \omega^2)m$$

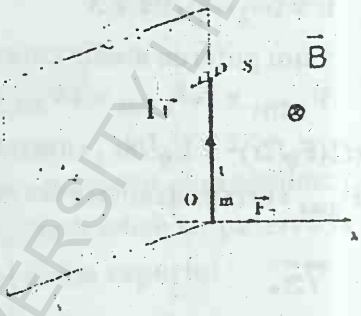


BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

În final, ecuația de mișcare a pistonului, va fi descrisă de :

$$x_{(t)} = [\, q_0 S / m\omega_0(\omega_0^2 - \omega^2)](\omega_0 \sin\omega t - \omega \sin\omega_0 t)$$

## 77.



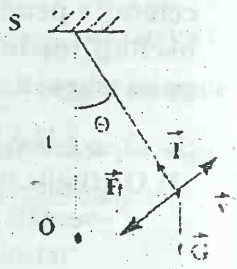

**Studiați oscilațilațiile amortizate prin frecarea cu aerul ale unui pendul matematic.**

**a) Determinați în ce condiții aceste oscilații sunt pseudoperiodice și reprezentați grafic dependența elongației în raport cu timpul.**

**b) Considerînd că firul de susținere SO al masei m este conductor și că face parte dintr-un circuit alimentat de o tensiune alternativă de frecvență ω ( firele de legătură fiind de masă neglijabilă ) iar perpendicular pe planul de oscilație acționează un cîmp magnetic uniform de inducție B, studiați dependența amplitudinii pendulului matematic de frecvența tensiunii alternative; se consideră curentul de valoare maximă $I_m$ prin circuit:**

**c) Imaginați un dispozitiv mecanic de întreținere a oscilațiilor pendulului cu frecare.**

### REZOLVARE




a) Pendulul cu frecare execută pseudooscilații amortizate, dacă coeficientul de frecare fluidă (h) nu depășește o anumită valoare

Legea de mișcare a sa este :

$\vec{F}_f + \vec{G} + \vec{T} = m\vec{a}$ unde $\vec{F}_f = -h\vec{v}$

BUCUREȘTI CENTRUL UNIVERSITAR LIBRARY

... ...ciată pe direc... ... oscilații

$-Gx - F_f = ma_x$, unde $a_x$ este acceleraţia tangenţială = ... i

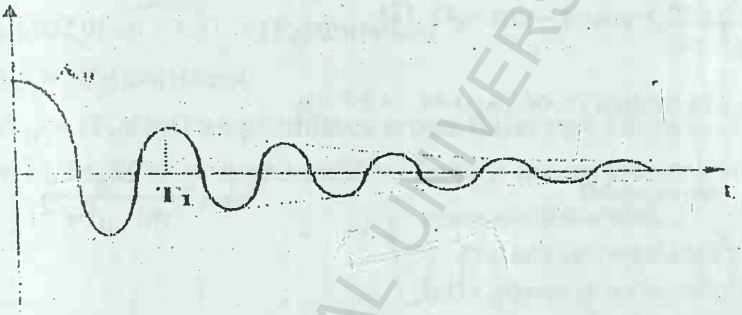
deci $a_x + (h/m)v + (g/l)x = 0$ (1) sau

$(d^2x/dt^2) + (h/m)(dx/dt) + \omega_0^2 x = 0$ unde $\omega_0^2 = g/l$ este pulsaţia proprie a oscilaţiilor libere neamortizate

Soluţia ecuaţiei (1) este oscilatorie doar dacă $(h^2/4m^2) \leq g/l$ deci $h \leq 2m\omega_0$. Atunci putem pune $\omega_1^2 = g/l - (h^2/4m^2)$ pseudopulsaţia şi scrie soluţia :

$x_{(t)} = A_0 e^{-(h/2m)t} \sin(\omega_1 t + \varphi)$

cu amplitudinea funcţie exponenţială descrescatoare în raport cu t ,




$\omega_1$ reprezintă pseudopulsaţia ,

$T_1 = 2\pi/\omega_1 = 2\pi/\omega_0 \sqrt{1 - (h^2/4m^2\omega_0^2)} > T_0$ (perioada oscilaţiilor neamortizate) .

b) Prin trecerea unui curent alternativ $i_{(t)} = \mathcal{I}_m \sin\omega t$ prin circuitul pendulului, în prezenţa cîmpului magnetic omogen $\vec{B}$ (de întindere limitată) ia naştere o forţă electromagnetică ...nsoidală de timp, orientată în lungul direcţiei de oscilaţie Ox:

$F_{(t)} = 1/2\, B\, i_{(t)} l = 1/2\, B \mathcal{I}_m l \sin\omega t = F_m \sin\omega t$

Ecu... ...işcare a pendulului devine :

$\ddot{x} + (h/m)\dot{x} + (mg/l)x = F_m \sin\omega t$ (2)

...rmanent, (pseudooscilaţiile amortizate de pulsaţia ...pid) soluţia ecuaţiei (2) va avea pulsaţia o impusă

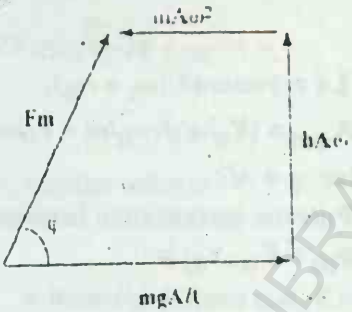


BCUJ-CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

de forța perturbatoare:

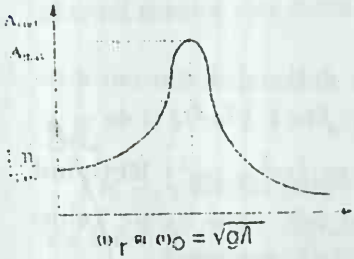
$x_{(t)} = A \sin(\omega t + \varphi)$

Amplitudinea se determină din diagrama fazorială:

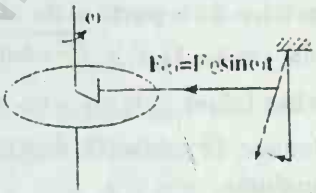



$$A_{(\omega)} = \frac{Fm/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + h^2\omega^2/m^2}}$$

Ea atinge un maxim în imediata vecinătate a lui $\omega_0$ (curba de rezonanță)




c) Un dispozitiv mecanic de întreținere ar fi constituit dintr-un fir elastic lung fixat excentric pe discul unui picup ce se rotește cu pulsația $\omega$ variabilă, celălalt capăt al firului fiind atașat aproape de punctul de suspensie al pendulului.




Forța perturbatoare sinusoidală va imprima pulsația ei oscilației pendulului, comunicîndu-i energie care să compenseze pierderile prin frecare.

## 78.

Stabiliți relația între lărgimea rezonanței (intervalul de frecvențe dintre cele două puncte care corespund scăderii la jumătate a puterii față de cea de rezonanță) și constanta de timp a oscilațiilor libere.

### REZOLVARE

Din diagrama fazorială rezultă

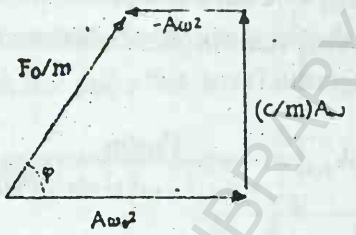
$$A_{(\omega)} = (F_0/m) / \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + C^2\omega^2/m^2}$$

BCU IASI / CENTRUL UNIVERSITARY LIBRARY

La rezonanță ($\omega_r \approx \omega_0$),

$A_{max} = (F_0/m)/c\omega_0/m \approx F_0/c\omega_0$

iar $\varphi = \pi/2$




Puterea instantanee furnizată

$p_{(t)} = F_{(t)} v_{(t)} =$

$= F_0 A\omega \cos(\omega t+\varphi)\sin\omega t =$

$= (F_0 A\omega/2)[\sin\varphi + \sin(2\omega t+\varphi)]$

mediată în timp $P_{(\omega)} = (F_0 A\omega/2)\sin\varphi$

La rezonanță $P_{max} = (F_0 A_{max}\omega_0/2)$

Banda frecvențelor de rezonanță se determină din condiția $P_{(\omega)} = P_{max}/2$, de unde ecuația : $F_0 A_{max}\omega_0/4 = CA^2\omega^2/2$ și de aici

$C^2\omega^2 = m^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2$ adică $C\omega = m|\omega^2 - \omega_0^2|$. Reținînd numai frecvențele pozitive avem pentru cele două limite valori simetrice de o parte și de alta a frecvenței de rezonanță :

$\omega_{1,2} = (\pm C + \sqrt{C^2+4m^2\omega_0^2})/2m$, iar lărgimea de rezonanță devine $(\Delta\omega)_{rez} = \omega_1 - \omega_2 = C/m = \gamma = 1/\tau$ inversul timpului de relaxare (constantă de timp) a oscilațiilor libere amortizate. Concluzie

$\tau(\Delta\omega)_{rez} = 1$

## 79.

O bilă cu masa m este suspendată de un resort elastic de constantă K prins cu un fir elastic ce trece peste un scripete ideal, excentric, pe suprafața unui disc ce se rotește cu pulsația variabilă (de exemplu – discul unui pick-up cu 3-4 trepte)

Găsiți ecuația de mișcare a bilei m în următoarele situații

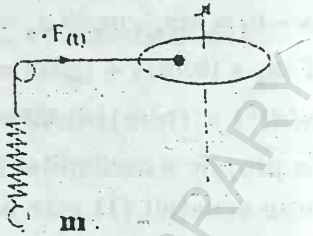
a) se neglijează frecările sale cu aerul. (condiții inițiale: $t_0=0$ $x_0=0$, $\dot{x}_0=0$,) Discuție.

b) se consideră că frecările sunt de natură fluidă (coeficient C). Cum variază amplitudinea oscilațiilor cu ...ația forței de antrenare ?



BCU CLUJ CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

## REZOLVARE




a) Neglijînd frecările

$m\ddot{x} = -Kx + F_0 \sin \alpha$ sau

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos\omega t \quad (1)$$

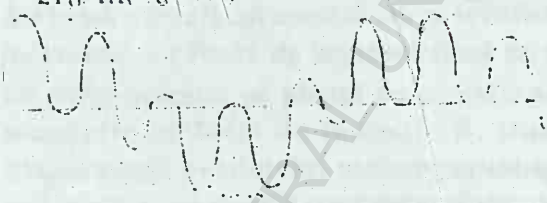
Soluția ecuației este o suprapunere a soluției generale a ecuației omogene și a uneia particulare a ecuației neomogene:

$$x(t) = A_1 \cos\omega t + A_2 \cos\omega_0 t$$

Din condițiile inițiale $A_1 = -A_2 = \dfrac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2}$ soluția devine

$$x(t) = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2}(\cos\omega t - \cos\omega_0 t) \quad (2)$$

Discuție: 1) pentru $\omega << \omega_0$ sau $\omega >> \omega_0$




$$x_{max} = \frac{2F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

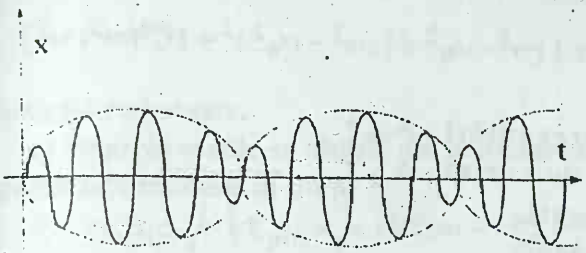
2) cînd $\omega$ și $\omega_0$ diferă puțin se obține fenomenul bătăilor:

$$x = \frac{2F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin\frac{\omega_0 - \omega}{2} t \cdot \sin\frac{\omega_0 + \omega}{2} t$$

cu $\dfrac{\omega_0 - \omega}{2} = \omega_{mod}$ și $\dfrac{\omega_0 + \omega}{2} = \omega_m$

$$x = A(t)\sin\omega_m t \qquad A(t) = \frac{2F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2}\sin\omega_{mod} t$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY



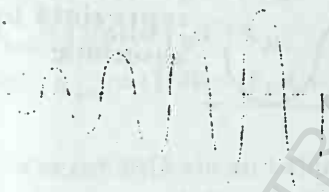

3) cînd $\omega = \omega_0$ (rezonanță)

$$x_{(t)} = (F_0/m) \lim_{\omega \to \omega_0} [(\cos\omega t - \cos\omega_0 t)/(\omega_0^2 - \omega^2)]$$

$$= (2F_0/m) \lim_{\omega \to \omega_0} \{[\sin(\omega_0 - \omega)t/2]/(\omega_0 - \omega)t/2\,(2/t)\}\{[\sin(\omega_0 + \omega)t/2]/(\omega_0 - \omega)\} = (F_0 t/2m)\sin\omega t$$

$x_{(t)} = (F_0 t/2m)\sin\omega t$

$A_{(t)} = (F_0 t/2m)$ amplitudinea crește liniar cu t viteza sa de creștere $F_0/2m$ fiind proporțională cu forța și invers proporțională cu masa oscilatorului.



4) dacă se consideră că oscilația proprie este neglijabilă față de cea impusă, rămînem în regim staționar cu soluția $x_{(t)} = A\cos\omega t$ unde

$$A_{(\omega)} = (F_0/m)/(\omega_0^2 - \omega^2)$$

b) $m\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = F(t)$ sau

$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = F\sin\omega t$

<u>În regim tranzitoriu</u> dacă

$x_{(t)} = A_0 e^{-(\gamma/2)t}\sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{(\omega)}\sin(\omega t + \varphi_{(\omega)})$ unde

$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}$ .

Dacă $\gamma/2 = \omega_0$ $x_{(t)} = A_0 e^{-(\gamma/2)t} + A_{(\omega)}\sin(\omega t + \varphi)$

critic



BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Dacă $\gamma/2 > \omega_0$ $x_{(t)} = A_0 e^{-(\gamma/2)t} \operatorname{ch} \sqrt{(\gamma^2/4 - \omega_0^2)}t +$

$+ A_{(\omega)} \sin(\omega t + \varphi)$

În regim permanent, repede instalat, rămîne soluția

$x_{(t)} = A_{(\omega)} \sin(\omega t + \varphi_{(\omega)})$

unde

$A_{(\omega)} = (F_0/m)/\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}$

al cărei maxim este atins pentru $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/2}$

## 80.

Fie $\omega_0$ pulsația proprie a unui oscilator liber de masa m cu frecare fluidă (coeficient C) antrenat de forța perturbatoare $F_{(t)} = F_0 \cos \omega t$

a) Arătați ca soluția generală $x_{(t)} = A\sin(\omega t + \varphi)$ (1) a ecuației ce descrie oscilația întreținută poate fi scrisă sub forma echivalentă : $x_{(t)} = A_{ab}\sin\omega t + A_{el}\cos \omega t$ (2)

b) Determinati amplitudinile $A_{ab}$ și $A_{el}$ din soluția generală (2) ca funcții de pulsația $\omega$ a forței perturbatoare și reprezentați-le grafic.

c) Exprimați puterea instantanee $p_{(t)}$ și reprezentați-o pentru o perioadă.

d) Mediați $p_{(t)}$ în timp și arătați că puterea absorbită se poate exprima numai în functie de $A_{ab}$ și că este egală cu puterea medie disipată prin frecare. Explicați semnificatia coeficienților $A_{ab}$ și $A_{el}$.

e) Exprimați energia înmagazinată, mediată în timp.

Arătați că ea conține doi termeni, unul în $\omega^2$, celălalt în $\omega_0^2$. Interpretați pentru $\omega < \omega_0$, $\omega = \omega_0$ și $\omega > \omega_0$.

BCU MS - CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

## REZOLVARE

a) Se dezvoltă soluția (1):

$x_{(t)} = A\sin(\omega t+\varphi) = A\cos\varphi \sin\omega t + A\sin\varphi \cos\omega t$

și se notează $A_{ab} = A\cos\varphi$ și $A_{cl} = A\sin\varphi$

deci ea poate fi scrisă $x_{(t)} = A_{ab}\sin\omega t + A_{cl}\cos\omega t$

b) Ecuația mișcării oscilatorii întreținute:

$ma + Cv + kx = F_0\cos\omega t$, unde $K/m = \omega_0^2$

permite determinarea celor două amplitudinii, prin înlocuire și identificarea coeficienților lui $\sin\omega t$, respectiv $\cos\omega t$:

$$\begin{cases} -\omega^2 A_{ab} - (C/m)A_{cl}\omega + \omega_0^2 A_{ab} = 0 \\ -\omega^2 A_{cl} + (C/m)A_{ab}\omega + \omega_0^2 A_{cl} = F_0 \end{cases}$$

Sistemul se ordonează:

$$\begin{cases} (\omega^2 - \omega_0^2)A_{ab} + (C/m)A_{cl}\omega + = 0 \\ (C/m)\omega A_{ab} - (\omega^2 - \omega_0^2)A_{cl} = F_0 \end{cases}$$

și se construiesc determinanți:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \omega^2 - \omega_0^2 & (C/m)\omega \\ (C/m)\omega & -(\omega^2 - \omega_0^2) \end{vmatrix} = -(\omega^2 - \omega_0^2)^2 - (C^2/m^2)\omega^2$$

$$\Delta_{ab} = \begin{vmatrix} 0 & (C/m)\omega \\ (F_0/m) & -(\omega^2 - \omega_0^2) \end{vmatrix} = -(C/m^2)\omega F_0$$

$$\Delta_{cl} = \begin{vmatrix} \omega^2 - \omega_0^2 & 0 \\ (C/m)\omega & (F_0/m) \end{vmatrix} = F_0(\omega^2 - \omega_0^2)$$

cu ajutorul cărora găsim:

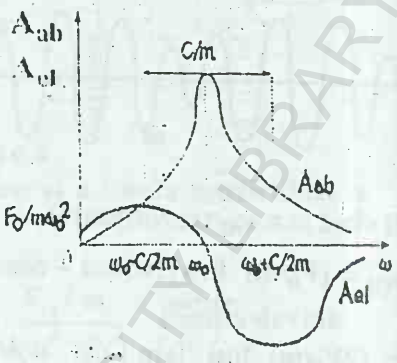
$$A_{ab} = \Delta_{ab}/\Delta = (C/m^2)\omega F_0 / [(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (C^2/m^2)\omega^2]$$



BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$A_{el} = \Delta_{el}/\Delta = (F_0/m)(\omega^2 - \omega_0^2)/[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (C^2/m^2)\omega^2]$$

ale căror reprezentări grafice în funcție de $\omega$ sînt redate în figura alăturată.




La frecvența rezonanță $\omega_r \cong \omega_0$ amplitudinea absorbitivă își atinge maximul:

$$A_{ab\,rez} = F_0/C\omega_0$$

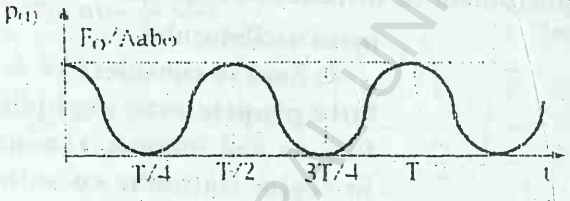
iar cea elastică devine zero

$$A_{el\,rez} = 0$$

c) Puterea instantanee

$$p_{(t)} = F_{(t)} v_{(t)} = F_0 \cos \omega t\, \omega (A_{ab} \cos \omega t - A_{el} \sin \omega t) =$$

$$= F_0 A_{ab} \omega \cos^2 \omega t - F_0 A_{el} \omega \sin \omega t \cos \omega t$$




d) Puterea mediată pe o perioadă reprezintă puterea absorbită:

$$\langle p \rangle_T = F_0 A_{ab} \omega \int_0^T \cos^2 \omega t\, dt = (F_0 A_{ab} \omega)/2 = P_{abs}$$

căci $\int_0^T \sin \omega t \cos \omega t\, dt = 0$

Puterea instantanee disipată prin frecare:

$$p_{f(t)} = dL_f/dt = Cv(dx/dt) = Cv^2 = C\omega^2 (A_{ab} \cos \omega t - A_{el} \sin \omega t)^2$$

Prin mediere în timp de o perioadă:

$$\langle p_f \rangle_T = (1/2)C\omega^2 (A_{ab}^2 + A_{el}^2) = (1/2)\omega F_0 \{(C/m^2)\omega F_0/[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (C^2/m^2)\omega^2]\} = (1/2)\omega F_0 A_{ab} = \langle p_{(t)} \rangle_T$$

deci puterea medie disipată prin frecare este compensată prin cea absorbită de la

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

forța perturbatoare.

e) Energia medie se obține din însumarea energiilor cinetică și potențială mediate în timp:

$E = \langle E_{c(t)} \rangle_T + \langle E_{p(t)} \rangle_T = (1/2)m \langle v^2_{(t)} \rangle_T + (1/2)m\omega^2 \langle x^2_{(t)} \rangle_T =$

$= (1/2)m\omega^2 \langle (A_{ab} \cos\omega t - A_{cl} \sin\omega t)^2 \rangle_T + (1/2)m\omega_0^2 \langle (A_{ab} \sin\omega t + A_{cl} \cos\omega t)^2 \rangle_T = (1/2)m\omega^2 [(A^2_{ab} + A^2_{cl})/2] + (1/2)m\omega_0^2 [(A^2_{ab} + A^2_{cl})/2]$

Primul termen, în $\omega^2$, reprezintă media energiei cinetice:

$\langle E_c \rangle_T = (1/2)m\omega^2 [(A^2_{ab} + A^2_{cl})/2] = f_{(\omega)}$

iar al doilea, în $\omega_0^2$, energia potențială mediată:

$\langle E_p \rangle_T = (1/2)m\omega_0^2 [(A^2_{ab} + A^2_{cl})/2] = g_{(\omega)}$

Le exprimăm ca funcții de pulsația $\omega$ a forței perturbatoare

$f_{(\omega)} = (1/4)(\omega F_0/C)\{ F_0 C/m^2/[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + C^2/m^2]\}$, deci

$f_{(\omega)} = (1/4)(\omega F_0/C) A_{ab}$

iar $g_{(\omega)} = (1/4)(\omega_0 F_0/C) A_{ab}$

La rezonanță ele au valori egale

$f_{(\omega_0)} = g_{(\omega_0)} = (1/4)(\omega_0 F_0/C) A_{ab\ rez}$

Din reprezentarea lor grafică rezultă că diferența dintre mediile în timp ale energiilor cinetice și potențiale devine cu atît mai mică, cu cît amortizarea e mai slabă (C mai mic). Acest fapt poate fi înțeles calitativ astfel: dacă $\omega$ este mare în comparație cu $\omega_0$, viteza corpului m își schimbă semnul înainte ca el să poată ajunge la o deplasare mare și deci înainte ca în resort să se poată ajunge la o înmagazinare de Ep mare.

Pe de altă parte, dacă $\omega$ este mic în comparație cu $\omega_0$, viteza nu devine niciodată foarte mare și în acest caz, energia potențială mediată în timp este dominantă.

Doar la rezonanța $\langle E_p \rangle_T = \langle E_c \rangle_T$

BCU "CAROL I" CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY